مبانی علوم ریاضی

محمدظاهر کاظمی بانه

عضو هیات علمی دانشگاه کردستان

مبانی علوم ریاضی

محمدظاهر کاظمی بانه

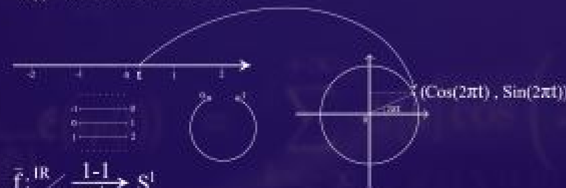
Foundations of Mathematical Science

By: Mohammad Zaher Kazemi Baneh

$$\begin{cases} f: X \xrightarrow{onto} Y \\ a\sim b \Leftrightarrow f(a)=f(b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{f}: X/\sim \xrightarrow[onto]{1\text{-}1} Y \\ \bar{f}([x]) = f(x) \end{cases}$$

$$f: IR \longrightarrow S^1$$

$$f(t) = (Cos(2\pi t)\ ,\ Sin(2\pi t))$$



$$\bar{f}: IR/\sim \xrightarrow[onto]{1\text{-}1} S^1$$

$$\bar{f}([t]) = (Cos(2\pi t)\ ,\ Sin(2\pi t))$$

$$r\sim s \Leftrightarrow r-s \in \mathbb{Z}$$

بسم الله الرحمن الرحیم

مبانی علوم ریاضی

مبانی علوم ریاضی

تألیف :

محمد ظاهر کاظمی بانه
(عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه کردستان)

تابستان ۱۴۰۲

تقدیم به:

آن پیروان صادق و مخلص مکتب قرآن که علم و دین را از سرچشمه‌ی واحد الهی می‌دانند و نه‌تنها هیچ تعارض و تناقضی بین آنها نمی‌بینند، بلکه هرکدام را مکمل و مبین دیگری می‌یابند.

ویراستاران:

فهرست مطالب

پیشگفتار

انسان از روزی که جهش یافت و دنیای پیچیده‌ی درون و روان به وی عطا شد، به دلیل توانایی درک مفاهیم و خصلت پویایی، در صدد شناخت هستی و آگاهی مجهولات هستی و تسخیر غیر مقدورات برآمد. تلاش وی برای علم به اسرار و رموز هستی و بهره‌مندی از آن، شروع و سرعت یافت.

شناخت فلسفه‌ی وجودی هستی و موجود مهم و عمده‌ی آن یعنی انسان که میزان ارزش هرچیزی به اعتبار سودمندی وی ارزیابی می‌شود، از سه مسیر برای انسان مطرح شد. ۱. ریاضیات ۲. طبیعیات ۳. الهیات. به وضوح هرکدام به ده‌ها شاخه‌ی اصلی و فرعی و جزئی‌تری تقسیم شده است. به عنوان مثال تنه‌ی طبیعیات به شاخه‌های اصلی فیزیک، شیمی، زیست، زمین و بسیاری شاخه‌های مهندسی تقسیم شده است. علوم شیمی به شاخه‌های فرعی آلی، معدنی، تجزیه، شیمی فیزیک، نانو و ... و از هرکدام بسیاری شاخه‌های ریزتری دسته‌بندی شده است.

مبرهن است که ابزار قوی و دقیق اندازه‌گیری و وسیله‌ی بیان مفاهیم علوم، ریاضی است. ریاضی وسیله‌ی انتقال یافته‌ها و اطلاعات است. به همین دلیل، ریاضی را مادر همه‌ی علوم می‌دانند. در فصل اول همین کتاب می‌بینیم که ریاضی ابزار توانمند ابراز و بیان عقاید و تشریح مفاهیم و استدلال منطقی و استنتاج درست است.

هرکدام از علوم با اصول موضوعه و مبانی اساسی خود، موجودیت و قوام می‌یابد. لذا مبانی

علوم ریاضی، یکی از مهمترین وسایل بیان مفاهیم ریاضیات، طبیعیات و حتی الهیات می‌باشد. چهار موضوع منطق، مجموعه، رابطه و تابع را در تمامی علوم می‌توان یافت و اثر عمده و بنیادی آن را به وضوح می‌توان دید. مبانی علوم ریاضی، آموزگار این مفاهیم و روش درست بهره‌گیری آنها است.

فصل اول بحث معرفت‌های بسیط و مرکب است. به بیانی دیگر بحث گزاره‌ها و ترکیب آنها، استدلال منطقی و روش‌های استدلال درست و شیوه‌های استنتاج منطقی است. در این فصل بنابه کاربرد بسیار آن در گفتگوی انسانها و باورهای آنها و اختلاط آن با زبان محاوره‌ای، به منظور درک بیشتر و تشخیص حقیقت و تمییز آن با تزویر و دروغ، و کاربرد منطق ریاضی در مفاهیم دینی از بیانات و مشرب فکری عارف مجاهد و دانشمند مشفق علامه کاکه احمد مفتی‌زاده استفاده شده است. در فصل دوم مجموعه‌ها را به شیوه‌ی اصول موضوعی شرح و بسط داده‌ایم. گرچه مجموعه‌ها ابزار بنیادی تمامی شاخه‌های علوم ریاضی هستند و در این کتاب نیز مفاهیم فصل‌های بعد بر این مبنا استوار است، اما بالذات مستلزم توضیح و تشریح است. در فصل رابطه‌ها، دو نوع رابطه‌ی ترتیبی و هم‌ارزی به تفصیل مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. همچنین مباحث پایه‌ای منطق با مباحث رابطه‌ی ترتیبی همچون مشبکه، جبر بول و جبر هیتینگ مطابقت داده می‌شود. هیچ شاخه‌ای از ریاضیات را نمی‌توان یافت که بدون تابع قوام یابد و اثر عمده و سازنده‌ای در آن نداشته باشد. فصل چهارم به این مفهوم بنیادی می‌پردازد. جای پای قضیه‌ی اساسی تابع در شاخه‌های جبر، آنالیز، توپولوژی و توپولوژی جبری گود شده است. طرح پشت جلد کتاب مثال بارزی از این قضیه است که در شاخه‌های مذکور بیان شده است. فصل ۵ و ۶ مکمل فصل مجموعه‌ها هستند. در فصل پنج، مجموعه‌ها از دو دیدگاه تناهی و شمارایی مورد بررسی قرار می‌گیرند و در فصل شش، مجموعه‌ها از نظر تعداد اعضا دسته‌بندی می‌شوند.

همچنانکه می‌دانید، اثبات مفاهیم ساده و بنیادی بسیار دشوارتر از مفاهیم پیشرفته و مرکب است. بعضی از این مفاهیم را هم به تنهایی و با اطلاعات قبلی دانسته شده نمی‌توان ثابت کرد. یکی از این مفاهیم اصل انتخاب است. دانشمندان زیادی در قرون ۱۹ و ۲۰ برای اثبات و یا رد آن تلاش کردند و در نهایت عدم توانایی اثبات و سازگاری آن را با اصول موضوعه‌ی نظریه مجموعه‌ها ثابت نمودند. ده‌ها معادل در بسیاری از شاخه‌های ریاضی برای اصل انتخاب معرفی و ثابت شده است. به همین دلیل قبول آن، نقطه‌ی رشد عجیبی در زمینه ریاضی و رد آن سد بزرگی است. در فصل ۷ اصل انتخاب و بعضی از معادل‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. طرح روی جلد کتاب، کتابخانه کالج ترینیتی ایرلند است که به عنوان مثال بارزی از اصل انتخاب، مورد استفاده قرار گرفته است.

امید است که این کتاب برای ارائه‌ی درس مبانی علوم ریاضی و درس نظریه‌ی مجموعه‌ها برای دانشجویان رشته‌ی ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر مفید واقع گردد. در پایان از تمامی اساتید و همکاران گرامی که مرا در تالیف کتاب، ترغیب و در ویراستاری قسمتی از کتاب، یاری نموده‌اند، بسیار سپاسگزارم.

محمدظاهر کاظمی بانه، عضو هیات علمی دانشگاه کردستان.

فصل ۱

منطق ریاضی

مقدمه

منطق، ابزار دریافت و انتقال درست مفاهیم هر علمی و هر موضوعی متناسب با ارزش واقعی آن است. همچنانکه می‌دانید؛ هر علمی موضوعی را دنبال می‌کند و متناسب با آن موضوع، اصول موضوعی برای آن موضوع تعریف می‌شود. بر مبنای آن اصول، مفاهیمی تعریف و بر مبنای آن تعاریف، احکام و قضایایی بیان می‌گردند که درستی آن‌ها را باید اثبات نمود و برای درستی آن‌ها استدلال کرد. منطق، ارائه‌ی اسلوب و شیوه‌های علمی دستیابی به مفاهیم سه‌گانه‌ی فوق است.

ارسطو منطق کلاسیک را پایه‌ریزی نمود و برتراند راسل در قرن ۱۹ کاستی‌های منطق ارسطویی را رفع و منطق نو را بنیان نهاد. راسل مفاهیم منطقی را با نمادها و علائم ریاضی بیان و چنان ساده نمود که بتوان آن را در دوره‌های متوسطه تدریس کرد. تمامی شاخه‌های ریاضی به وسیله‌ی این قواعد مطالب خود را بیان و برای ادعای خود استدلال می‌کنند به همین دلیل آن را منطق ریاضی نامگذاری کردند. منطق ریاضی، بررسی اصول و شیوه‌های بیان گزاره‌ها، استدلال و استنتاج درست است.

گرچه خوانندگان شناختی نسبی از مجموعه دارند، اما لازم است قبل از ارائه‌ی این فصل مجموعه را به عنوان دسته‌ای از اشیاء مشخص و معین و دوبه دو مجزا که جابجایی اشیاء در آن مجموعه اثری

ندارد و تغییری ایجاد نمی‌کند، یادآوری شود.

۱.۱ گزاره‌ها و ترکیب آنها

در ادبیات هر زبانی، جملات به صور گوناگون از جملات خبری، پرسشی، امری، عاطفی، تعجبی، آرزویی و حتی به صورت شبه جمله نیز تقسیم بندی می‌شوند. به وضوح تنها موضوع مورد بحث ما در علم ریاضی و بسیاری از علوم دیگر تنها صورت جمله‌ی خبری است و آن‌هم جملاتی که تنها یکی از دو حالت درست یا نادرست بودن را بپذیرند. جملاتی خبری هم که نامشخص باشند یا سلیقه‌ی انسانها در آن دخیل باشد یا تعاریف مختلفی در مورد کلمات آن جمله موجود باشد و یا مفهوم مطلقی به جای حالتی نسبی یا تفضیلی بکار رود، موردنظر منطق ریاضی نیست. چنین جملاتی خبری را گزاره می‌نامند.

مثال ۱.۱.۱. جملات زیر گزاره‌اند.

(۱) : سنندج مرکز استان کردستان است.

(۲) : ۵ عددی اول است.

(۳) : روز تولد فرما، یکشنبه بود.

(۴) : $۲^۳ = ۶$

(۵) : عدد π ، یک عدد گویاست.

(۶) : صدمین رقم اعشاری $\sqrt{۷}$ ، ۵ است.

(۷) : هزارمین عدد اول، ۱۰ رقمی است.

درستی یا نادرستی بعضی از گزاره‌های فوق را می‌توان به سادگی بدست آورد و بعضی نیازمند به

بررسی بیشتر و یا محاسبات خیلی دقیق و پیچیده‌ای هستند. بعضی گزاره‌ها هستند که سالها و یا شاید قرنها طول بکشد که درستی آن را ثابت یا رد کرد ولی لطمه‌ای به گزاره بودن آن وارد نمی‌کند همانند آخرین قضیه‌ی فرما.

مثال ۲.۱.۱. جملات زیر گزاره نیستند.

(۱) : احمد خوش اخلاق است.

(۲) : آسمان غنی است .

(۳) : وسایل مغازه‌ی محمدآقا ارزان قیمت هستند.

(۴) : x عددی اول است.

(۵) : اسب مربع کامل است.

در مثال (۱)، خوش اخلاق بودن و در حالت کلی خوش اخلاقی یا بد اخلاقی یک مفهوم سلیقه‌ای است و یا ممکن است یک حالت ثابت در شرایطی خوش اخلاقی و در شرایطی دیگر بداخلاقی تلقی می‌شود.

تواضع تحمل بود با فقیر   ولیکن تذلل بود با امیر

در مثال (۲)، هر فردی برای زمینه‌ی تخصصی خود تعریفی از غنی بودن دارد لذا بیان یک مفهوم به صورت مطلق و نامشخص در گزاره‌های ریاضی درست نیست.

در مثال (۳)، وسایل مغازه‌ای به نسبت مغازه‌ای ارزان قیمت و نسبت به مغازه‌ای دیگر که ما آن را نمی‌شناسیم شاید گران‌تر باشند، پس چنین جمله‌ای خبری گزاره نیست.

در مثال (۴)، x یک مجهول و نامشخص است. می‌توان آن را یکی از حروف الفبای انگلیسی در نظر

گرفت. در حالت اول گزاره‌ای نادرست و در حالت دوم برای بعضی اعداد طبیعی یک گزاره درست و برای بعضی یک گزاره نادرست بدست می‌آید.

معمولا برای گزاره‌ها در منطق ریاضی از حروف کوچک $p, q, r, s, ...$ استفاده می‌کنیم.

گزاره‌هایی همچون مثال اول که هر کدام یک مفهوم را بیان می‌کنند، گزاره‌ی ساده نامیده می‌شوند.

می‌توان از ترکیب گزاره‌ها، گزاره‌های جدید ساخت که آنها را گزاره‌های مرکب می‌نامند.

مثال ۳.۱.۱. گزاره‌های زیر مرکب هستند.

(۱): عدد π گویا نیست و از ۳ بزرگتر است.

(۲): احمد به دانشگاه می‌رود یا کار می‌کند.

(۳): اگر برف بیاید، آنگاه هوا سرد است.

برای ترکیب گزاره‌های ساده و تشکیل گزاره‌های مرکب شیوه‌های متعددی وجود دارد که در زبان‌های مختلف از آنها به عنوان حروف ربط و در بعضی موارد حروف اضافه یاد می‌شود در منطق ریاضی نیز رابطهایی اصلی و رابطهایی فرعی وجود دارند که دو گزاره را با هم ترکیب می‌کنند.

رابطهای اصلی عبارتند از : الف : نفی یا نقیض

ب: ترکیب عطفی " و "

پ : ترکیب فصلی " یا " یای شمول یای منطقی

ت : ترکیب شرطی " اگر ــ آنگاه "

ث : ترکیب دوشرطی " اگر و تنها اگر "

اگرچه ترکیب‌های فصلی، شرطی و دو شرطی را با استفاده‌ی مکرر ترکیب عطفی و نقیض گزاره‌ها به صورت پیچیده می‌توان بدست آورد، اما ما آنها را باز به عنوان ترکیب‌های اصلی بیان می‌کنیم.

رابط‌های فرعی زیادی وجود دارند که بعضی از آنها عبارتند از:

الف : ترکیب فصلی بلا عطف " یای مانع جمع " (ترکیب متناقض، جمع نقیضین).

ب : ترکیب ناسازگار " نه این و یا نه آن " (ترکیب متضاد، جمع ضدین).

پ : ترکیب نفی متصل " نه این و نه آن ".

همچنانکه در شروع درس یادآور شدیم هر گزاره تنها یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به خود می‌گیرد و چنین منطق کلامی را منطق دو ارزشی یا منطق ریاضی و یا منطق کلاسیک می‌نامیم. اگرچه در کلام متداول انسانها، جملاتی خبری هستند که تنها یکی از دو صورت درست و نادرست و یا دو صورت صفر و یک و یا سفید و سیاه را ندارند، بلکه می‌توانند قسمتی درست و قسمتی نادرست، یا در بازه‌ی صفر و یک قرار بگیرند و در حالت کلی می‌بینیم که بین سیاه و سفید طیفی از خاکستری نیز وجود دارد. چنین منطقی را منطق فازی می‌نامیم. از آنجا که برای ریاضی و اثبات قضایای موجود در شاخه‌های آن، تنها نیاز به منطق کلاسیک است لذا در این کتاب تنها از منطق دو ارزشی سخن به میان آمده است.

تعریف ۱.۱.۱. نقیض (نفی): اگر p یک گزاره باشد، آنگاه نقیض گزاره‌ی p نیز یک گزاره است و آن را با $\sim p$ نمایش می‌دهیم. ارزش $\sim p$ وابسته به ارزش p است. ارزش گزاره‌ی $\sim p$ متناقض با ارزش p است، بدین معنی که اگر p درست، آنگاه $\sim p$ نادرست و اگر p نادرست، آنگاه $\sim p$ درست است.

معمولا $\sim p$ را با " نقیض p " یا " چنین نیست که p " یا " نه p " می‌خوانیم. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی " علی دانشجو است " به صورت " علی دانشجو نیست " و یا " چنین نیست که علی دانشجو است " بیان می‌شود.

برای ارزش گذاری دو گزاره، از علامت‌های مختصر " د "، " ۱ "، و یا " t " برای درست و از علائم " ن "، " ۰ " و یا " f " برای نادرست استفاده می‌کنند. در این کتاب از علائم " د " و " ن " به ترتیب برای مفاهیم درست و نادرست استفاده شده است.

برای سادگی کار، در موقع یافتن تمام حالات ممکن در ترکیب گزاره‌ها و رابطه‌ی بین آنها از یک جدول به نام جدول ارزش گزاره‌ها یا جدول درستی استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال جدول ساده‌ی زیر بیانگر حالات ممکن و رابطه‌ی دو گزاره‌ی p و $\sim p$ است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

جدول ۱.۱: جدول ارزش درستی نقیض

تعریف ۲.۱.۱. ترکیب عطفی: هر گاه دو گزاره‌ی p و q را با حرف عطف " و " با هم ترکیب کنیم گزاره‌ی مرکبی بدست می‌آید که آن را با $p \wedge q$ (در بعضی موارد $p\&q$) نمایش داده و می‌خوانیم " p و q " گزاره $p \wedge q$ تنها در حالتی درست است که هر دو درست باشند.

از آنجا که برای هر کدام از گزاره‌های p و q دو حالت ممکن است. لذا برای ترکیب دو گزاره، ۲×۲ حالت ممکن وجود دارد که در جدول ارزشی زیر تمام حالات بیان شده است.

در زبان محاوره‌ی مردم از حروفی همچون " اما "، " ولی " و نظایر اینها استفاده می‌شود که به نوعی همان ترکیب عطفی است. به عنوان مثال؛ من به بازار رفتم ولی سبزی نخریدم، یعنی دو گزاره‌ی من به بازار رفتم و من سبزی نخریدم، ترکیب عطفی شده‌اند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جدول ۱.۲: جدول ارزش درستی ترکیب عطفی

در یک گزاره‌ی مرکب از ترکیب دو گزاره، معمولا هر کدام از گزاره‌ها را مولفه می‌نامند. ممکن است هر کدام از مولفه‌ها، خود یک گزاره‌ی مرکب باشد.

تذکر ۱.۱.۱. با استفاده از آنالیز ترکیبی و جایگشت‌ها، در ترکیب n گزاره، تمامی حالات ممکن برای ارزش گذاری گزاره‌ی مرکب، ۲^{n} حالت می‌باشد. مثلا برای ترکیب سه گزاره‌ی p ، q و r، $۲^{۳} = ۸$ حالت ممکن است. به منظور راهنمایی دانشجویان برای نوشتن حالات ممکن، برای گزاره‌ی p نصف درست و نصف نادرست، برای q به صورت ربع های فرد (اول و سوم) و ربع های زوج (دوم و چهارم) و برای گزاره‌ی r یک هشتم های فرد (اول، سوم، پنجم، هفتم) درست و یک هشتم‌های زوج (دوم، چهارم، ششم، هشتم) نادرست قرار دهید و به همین منوال ادامه دهید. به عنوان مثال برای ترکیب سه گزاره‌ی p ، q و r تمامی حالات ممکن در جدول ارزش زیر بیان شده است.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

جدول ۱.۳: جدول درستی و نادرستی ترکیب سه گزاره

شما برای چهار گزاره جدولی با $۱۶ = ۲^{۴}$ حالت سطر رسم کنید.

تعریف ۳.۱.۱. ترکیب فصلی: در ترکیب دو گزاره‌ی p و q با هدف " یا " که گزاره‌ی مرکب " p یا q " بدست می‌آید و با نماد " $p \vee q$" نوشته می‌شود، در صورتی درست است که حداقل یکی از آنها درست باشد و یا $p \vee q$ تنها در صورتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد.

باز یادآوری می‌کنیم $p \vee q$ بدین معنی نیست که فقط یکی از آنها درست است، می‌تواند هر دو درست باشند.

مثال ۴.۱.۱. گزاره‌های مرکب فصلی زیر درست هستند.

(۱) : عدد ۴ زوج است یا اول است.

(۲) : عدد ۳ زوج یا اول است.

(۳) : عدد ۲ زوج است یا اول است.

جدول ارزشی ترکیب فصلی $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ۴.۱: جدول ارزش درستی ترکیب فصلی

در ادبیات محاوره‌ای و حتی کتابی، حرف " یا " را برای منظور " یای مانع جمع " بکار می‌برند؛ بدین معنی که فقط یکی از دو گزاره درست هستند و هر دو باهم درست و یا نادرست نیستند. در منطق ریاضی چنین ترکیبی را ترکیب متناقض یا ترکیب فصلی بلاعطف (یا بدون عطف) می‌نامند و آن را با علامت $p \veebar q$ نمایش می‌دهند، جدول ارزش گزاره‌ای $p \veebar q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \veebar q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

جدول ۵.۱: جدول ارزش درستی ترکیب فصل بلاعطف

از آنجا که، ترکیب "یای مانع جمع" به وسیله‌ی ترکیبات اصلی به سادگی بدست می‌آید، در بسیاری از کتابها از این ترکیب صرفنظر می‌کنند. ما نیز به همین دلیل آن را یک ترکیب فرعی نامگذاری کرده‌ایم. شاید جمله‌ی " جمع و رفع نقیضین محال است " را شنیده باشید که بیانگر همین ترکیب فصلی بدون عطف است. بیایید مثالی در کلام دین بزنیم. اگر در قرآن کمی تامل کنید متوجه می‌شوید که نشانه‌های ایمان و خصال مومنین، رحم و مهربانی و رافت و محبت و رقت قلب [۱] است و نشانه‌های کفر و خصوصیات کافران، بی رحمی و بی محبتی و سنگدلی و سختی و شدت قلب [۲] است. به وضوح می‌توان فهمید که این دو در تقابل همدیگر قرار دارند. در آیات متعدد خصوصیات ایمان فعال را در غیر مسلمانان از جمله از شرایع دیگر همانند مسیحیت، یهودیت، صابئی و ... می‌توان دید. لذا قرآن هر کس که مسلمان نباشد، کافر به حساب نمی‌آورد. مفهوم ایمان و کفر به قلب مربوط است [۳] و جمع نقیضین است، یعنی حتما یکی از آنها وجود دارد و امکان ندارد که هر دو در قلب انسانی باشد. زیرا که ثمره‌ی ایمان در درون هر انسانی اخلاق به مفهوم صفات و خصال والای انسانی است و در انسانی خصلتی مثبت یافت شود درخت ایمان در وجود او ریشه دارد ولو خود نداند. زیراکه

[۱] الف:اذا ذکر الله وجلت قلوبهم(انفال۲) ب:تقشعر منه ...ثم تلین جلودهم وقلوبهم(زمر۲۳) ج:تری اعینهم تفیض من الدمع(مائده۸۳)

[۲] ثم قست قلوبکم...فهی کالحجاره او اشد قسوه(بقره۷۴)

[۳] لم تومنوا ...و لما یدخل الایمان فی قلوبکم(حجرات۱۴)

دانستن به ذهن و ایمان به قلب مربوط است. [۴]

تعریف ۴.۱.۱. اگر دو گزاره را نوعی ترکیب کنیم که: در صورتی نادرست باشد که هر دو درست باشند چنین ترکیبی را ترکیب متضاد و چنین گزاره‌ی مرکبی را " جمع ضدین " می‌نامیم. در منطق ریاضی ترکیب متضاد دو گزاره را ترکیب ناسازگار نیز می‌گویند. در بعضی از کتابها ترکیب ناسازگار دو گزاره‌ی p و q را با $p \mid q$ نمایش می‌دهند.

جدول ارزش گزاره‌ای آن به صورت زیر است:

p	q	$p\|q$
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	د

جدول ۶.۱: جدول ارزش درستی ترکیب متضاد

مثال ۵.۱.۱. در ترکیب رنگها، جمع ضدین یا ترکیب متضاد برقرار است. یک شیئ می‌تواند سفید نباشد و سیاه هم نباشد، اما هم سفید و هم سیاه نیست.

مثال ۶.۱.۱. طبق توضیح فوق، ممکن است انسان، مسلمان نباشد و کافر هم نباشد. چقدر غیرمنطقی است که، بزرگوارانی همچون گاندی، ماندلا، لومومبا، چگوارا و امثال آنها را کافر بنامیم. [۵]

[۴] مفهوم کفر و کافر؛ امام غزالی(فیصل التفرقه): دسته‌ای که دعوت به صورت صحیح به آنها رسیده ولی به خاطر استکبار و عناد از نظر ادله‌ی آن و پذیرشش سرباز می‌زنند. آیت‌الله مطهری(عدل الهی): روح کفر، ستیزه‌جویی و مخالفت‌ورزی با حقیقت در عین شناخت حقیقت است. آیت‌الله طالقانی(پرتوی از قرآن): کفر انکار اصول یا ضروریات دین است...کلمه کفر مانند ایمان نظر به باطن و حقیقت است...و با ایمان تقابل تضاد دارد(نه عدم و ملکه) و عارضه‌ی نفسانی و عناد است(در جایی دیگر)مقابله‌گر عالم عامد کافر است. شیخ محمدعبده، استاد رشیدرضا(تفسیر المنار): من یعرف الحق و ینکره عنادا، و هولاء هم الاقلون.... کاکه احمد مفتی‌زاده(نامه ۶): ...به قول مرحوم شیخ محمدعبده_ درجاتش در دار رحمت والاتر باد_: باید دین در صورت درست و کامل آن، عرضه گردد؛ آنگاه مقابله‌گر با علم و عمد، کافر خواهد بود. به نظر من، همراه چنان عرضه ای، وجود "شاهد"(نمونه‌ی عینی) دین هم لازم است تا عقل به واسطه‌ی کامل بودن حجت، بی‌تردید گردد(اما مقابله با بعض‌الحق معصیت است، به‌تناسب درجات، نه کفر).

[۵] مطهری کسانی همانند دکارت را نه کافر بلکه مسلم فطری می‌داند و کاکه احمد امثال ماندلا را ملحد مومن می‌نامد.

در کلاس بارها شنیده‌اید که معلم از دانشجویان می‌پرسد: ساعت چند است؟ بهر دلیل دانشجویان جوابهای متفاوتی به استاد می‌دهند. به وضوح همه‌ی آنها با هم امکان پذیر نیست. شاید یکی از آنها درست و شاید هیچ کدام از آنها درست نباشد.

تعریف ۵.۱.۱. ترکیب شرطی: نوعی دیگر از ترکیب دو گزاره، ترکیب شرطی است به طوری‌که اولی، دومی را نتیجه می‌دهد. اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه گزاره‌ی مرکب شرطی " اگر p آنگاه q " را با $p \longrightarrow q$ نمایش داده و ارزش آن بدین صورت است که گزاره‌ی مرکب $p \longrightarrow q$ در صورتی نادرست است که درست، نادرست را نتیجه دهد، یعنی اگر p درست و q نادرست باشد، " آنگاه گزاره‌ی مرکب $p \longrightarrow q$ نادرست است.

جدول ارزش گزاره‌ی ترکیب شرطی به صورت زیر است.

p	q	$p \longrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

جدول ۷.۱: جدول ارزش درستی ترکیب شرطی

بدیهی است که نادرست، هم می‌تواند درست را نتیجه دهد، هم می‌تواند نادرست را نتیجه دهد. در این صورت گزاره‌ی مرکب شرطی درست خواهد بود. در زبان محاوره‌ای این دو حالت مطرح نمی‌شود و تنها حالت درست، درست را نتیجه می‌دهد بکار برده می‌شود. یا نادرست، نادرست را نتیجه می‌دهد.

برای $p \longrightarrow q$ جملاتی همانند " p نتیجه می‌دهد q را " ، " q اگر p "، " p فقط اگر q "، " p

شرط کافی برای q است "، " q شرط لازم برای p است "، " p مقدم و q تالی ". در گزاره‌ی شرطی $p \longrightarrow q$ ، اگر p نادرست باشد، گوییم گزاره‌ی $p \longrightarrow q$ به انتفای مقدم، درست است.

به مثال‌های زیر توجه کنید. شیوه‌ی ارزش دهی گزاره‌ی شرطی را بهتر درک خواهید کرد.

مثال ۷.۱.۱. الف : اگر باران ببارد، آنگاه هوا ابری است.

ب : اگر هوا آفتابی باشد، آنگاه به مسافرت می‌رویم.

یک گزاره‌ی شرطی همیشه درست را یک **استلزام** می‌نامیم. در یک گزاره‌ی شرطی اگر با فرض درست بودن p با روش‌های درست استدلال، درستی q نتیجه شود، آن گزاره‌ی شرطی درست را **قضیه** می‌نامیم که بارها در دوره‌های قبل با این کلمه برخورد کرده‌اید. در بعضی کتاب‌ها یک استلزام را با $p \Longrightarrow q$ نمایش می‌دهند.

ترکیب دوشرطی: بعضی مواقع در زبان محاوره و بسیاری اوقات در مفاهیم ریاضی و علوم دیگر می‌خواهیم ثابت کنیم که ارزش درستی دو گزاره، یکسان هستند و این دو گزاره را به شیوه‌ای به هم ربط می‌دهیم. چنین ترکیبی را ترکیب دو شرطی می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت ترکیب دو شرطی p و q را با نماد « $p \longleftrightarrow q$ » نمایش داده و می‌خوانیم « p اگر و تنها اگر q » . این گزاره‌ی مرکب تنها در صورتی درست است که یا هر دو درست باشند یا هر دو نادرست.

برای « $p \longleftrightarrow q$ » جملاتی همانند « p اگر و فقط اگر q » ، « q اگر و تنها اگر p » ، « p شرط لازم و کافی است برای q » ، « q شرط لازم و کافی است برای p » و نظایر آنها نیز بکار برده می‌شود. اگر دو گزاره از نظر ارزشی با هم یکسان باشند آن دو را **معادل یا هم‌ارز** می‌گوییم.

جدول ارزش درستی ترکیب دو شرطی دو گزاره به صورت زیر است.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

جدول ۱.۸: جدول ارزش درستی ترکیب دوشرطی

اگر یک گزاره‌ی دوشرطی همیشه درست باشد، آنگاه آن دو گزاره با هم معادل خواهند بود. در این صورت گزاره دوشرطی را یک استلزام دو شرطی می‌نامند و با علامت « $p \iff q$ » نمایش می‌دهند. اگر دو گزاره‌ی p و q هم‌ارز باشند با علامت $p \equiv q$ نیز نمایش می‌دهند.

یک گزاره‌ی همیشه درست را با T $(True)$ و یک گزاره‌ی همیشه غلط را با F $(False)$ نمایش می‌دهیم.

در زبان محاوره، ترکیب نفی متصل یعنی هیچکدام. یعنی اگر دو گزاره‌ی p و q را با ترکیب نفی متصل، با هم ترکیب کنیم گزاره‌ی مرکب تنها موقعی درست است که هیچکدام درست نباشد (یعنی موقعی درست است که نه p درست است و نه q). در بعضی از کتابها، این ترکیب را با $p \downarrow q$ نمایش می‌دهند.

p	q	$p \downarrow q$
د	د	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

جدول ۱.۹: جدول ارزش درستی ترکیب نفی متصل

۲.۱ قوانین هم ارز در ترکیب گزاره‌ها

حال بعضی از هم‌ارزی‌ها و استلزام‌های مربوط که ترکیب گزاره‌ها را به عنوان قضیه بیان می‌کنیم و هر کدام را به عنوان قوانینی که بعدا در روش‌های استدلال و اثبات و استناج قضایا بکار می‌بریم، نامگذاری می‌کنیم.

قوانین هم‌ارز مربوط به ترکیب عطفی و فصلی

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید p ، q و r سه گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) قانون نفی مضاعف : $\sim(\sim p) \equiv p$

ب) قوانین خودتوانی : $p \wedge p \equiv p, \qquad p \vee p \equiv p$

ج) قوانین جابجایی : $p \wedge q \equiv q \wedge p, \qquad p \vee q \equiv q \vee p$

د) قوانین شرکت پذیری :

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

ه) قوانین توزیع پذیری یا پخشی :

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

برهان. فقط یکی از قوانین پخشی را با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ثابت میکنیم و بقیه را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

□

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

جدول ۱۰.۱: جدول درستی قانون پخشی

قضیه ۲.۲.۱. (قوانین دمورگان) فرض کنید p و q دو گزاره باشند. قوانین زیر برقرارند.

الف) نقیض ترکیب عطفی: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

ب) نقیض ترکیب فصلی: $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

برهان. قسمت الف را ثابت می‌کنیم و قسمت ب را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

□

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q)$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

جدول ۱۱.۱: جدول درستی قانون دمورگان

نتیجه ۱.۲.۱. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) ترکیب نفی متصل: $p \downarrow q \equiv \sim (p \vee q)$

ب) ترکیب ناسازگار: $p \mid q \equiv \sim (p \wedge q)$

به همین دلیل این دو ترکیب را ترکیب فرعی نامیدیم.

قوانین هم‌ارز مربوط به ترکیب شرطی و عطفی و فصلی

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید p ، q و r سه گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) قانون عکس نقیض:

$$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$$

ب) رابطه‌ی شرطی و فصلی:

$$p \longrightarrow q \equiv q \vee \sim p$$

پ) قوانین توزیع پذیری :

$$p \vee (q \longrightarrow r) \equiv (p \vee q) \longrightarrow (p \vee r)$$

$$p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$$

$$p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$$

ج) قانون برهان خلف :

$$p \longrightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)$$

د) قانون تفکیک دو مقدم :

$$p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv (p \wedge q) \longrightarrow r$$

قوانین هم‌ارز مربوط به ترکیب دوشرطی و عطفی و فصل بلاعطف

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) $p \longleftrightarrow q \equiv \sim p \longleftrightarrow \sim q$

ب) $p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

ج) $p \longleftrightarrow q \equiv \sim (p \veebar q)$

از قسمت ج متوجه می‌شویم که ترکیب فصل بلاعطف نقیض ترکیب دو شرطی است به همین دلیل آن را ترکیب فرعی نامیدیم.

قوانین استلزام در ترکیب گزاره‌ها

قضیه ۱.۲.۵. فرض کنید p و q دو گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) قانون جمع (ادخال فاصل):

$$p \Longrightarrow p \vee q$$

ب) قوانین اختصار (حذف عاطف):

$$p \wedge q \Longrightarrow p, \qquad p \wedge q \Longrightarrow q$$

ج) قوانین حذف (رفع مولفه):

$$(p \vee q) \wedge (\sim p) \Longrightarrow q$$

$$(p \vee q) \wedge (\sim q) \Longrightarrow p$$

د) قانون قیاس (انتزاع):

$$(p \longrightarrow q) \wedge p \Longrightarrow q$$

ه) قانون قیاس دفع (نقیض انتزاع):

$$(p \longrightarrow q) \wedge (\sim q) \Longrightarrow \sim p$$

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید p ، q و r سه گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) قانون تعدی یا ترایابی: (در ترکیب شرطی) $(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r) \Longrightarrow p \longrightarrow r$

ب) قانون تعدی یا ترایابی: (در ترکیب دو شرطی) $(p \longleftrightarrow q) \wedge (q \longleftrightarrow r) \Longrightarrow p \longleftrightarrow r$

قضیه ۱.۲.۷. **(قوانین هیلبرت)** فرض کنید p ، q و r سه گزاره باشند. در این صورت قوانین زیر برقرارند.

الف) $p \longrightarrow q \Longrightarrow \lceil (p \wedge r) \longrightarrow (q \wedge r) \rceil$

ب) $p \longrightarrow q \Longrightarrow \lceil (p \vee r) \longrightarrow (q \vee r) \rceil$

قضیه ۸.۲.۱. (قوانین راسل) فرض کنید p ، q ، r و s گزاره باشند. قوانین زیر برقرارند.

الف) $$\lceil (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \rceil \Longrightarrow \lceil (p \wedge r) \longrightarrow (q \wedge s) \rceil$$

ب) $$\lceil (p \longrightarrow q) \wedge (r \longrightarrow s) \rceil \Longrightarrow \lceil (p \vee r) \longrightarrow (q \vee s) \rceil$$

۳.۱ گزاره نما و سورهای منطقی

همانطور که در تعریف گزاره اشاره شد، یک گزاره، یک جمله‌ی خبری است که تمام کلمات آن مشخص و با مفهوم است و رابطه‌ی بین کلمات هم، معنی دار است.

مثال‌های « x یک عدد اول است » و « اسب مربع کامل است » را دوباره مرور کنید در جمله‌ی اول x یک متغیر است که نمی‌دانیم در چه دسته‌ای قرار دارد و در جمله‌ی دوم گرچه تمام کلمات مشخص و معلوم هستند اما رابطه‌ی درستی بین آنها نیست.

حال اگر به جای x در جمله‌ی اول و به جای اسب در جمله‌ی دوم، یک عدد طبیعی قرار دهیم، هر دو به گزاره (درست یا نادرست) تبدیل می‌شود. لذا نیاز به مجموعه‌ای است که گزاره‌های مورد بحث در محدوده آن دارای معنی باشند. چنین مجموعه‌ای را مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی جهانی، عالم سخن، حوزه‌ی سخن یا قلمرو کلام می‌نامیم. به طور خلاصه حوزه‌ی سخن دسته‌ای از اشیاء است که ویژگی‌های آنها موردبحث ماست.

مجموعه‌ی همه‌ی مفاهیم یا اشیاءی از حوزه سخن که ویژگی بیان شده در گزاره را شامل است مجموعه‌ی برداشت می‌نامند و مجموعه چیزهایی از حوزه سخن را که زمینه‌ی گزاره را دربردارد مجموعه‌ی شناخت می‌نامند. گاهی مجموعه‌ی شناخت را همان حوزه سخن در نظر می‌گیرند. به عنوان مثال « ۵ یک عدد اول است » ، ۵ از مجموعه شناخت و مجموعه برداشت مجموعه اعداد اول است. ریاضی در زبان محاوره نیز کلماتی همچون، فلانی، آن چیز، فلان شیئی در جملات خبری

بکار می رود که با جایگزینی آن به اسمی مشخص به یک گزاره تبدیل می‌شود این کلمات را متغیر می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۱. گزاره نما یک جمله‌ی جبری شامل یک یا چند متغیر از یک مجموعه‌ی مرجع است که با جایگزینی اعضایی از آن مجموعه به جای متغیرها، یک گزاره بدست می‌آید.

مثال ۱.۳.۱. جملات زیر گزاره نما هستند.

الف : x بال دارد. (حوزه‌ی سخن، حیوانات)

ب : x نویسنده‌ی دیوان شمس است. (حوزه‌ی سخن، شاعران)

ج : x برادر y است. (حوزه‌ی سخن، انسانها)

د : $x^۲ + ۱ > ۰$ (حوزه‌ی سخن، اعداد حقیقی)

ه : $۲x + ۳y = ۵$ (حوزه‌ی سخن، مجموعه‌ی نقاط صفحه‌ی مختصات)

و : مثلث x و y با هم متشابه هستند. (حوزه‌ی سخن، مجموعه‌ی مثلث‌ها)

هر معادله‌ای و هر نامعادله‌ای و هر تابعی در مجموعه‌ی مرجع خود یک گزاره نما است.

یک گزاره نما با یک متغیرx از یک حوزه‌ی سخن را معمولا با $P(x)$ و با دو متغیر x و yرا با $P(x, y)$ و به همین صورت با n متغیر $x_۱, x_۲, ..., x_n$ را با $P(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ نمایش می‌دهند. دسته‌ای از اعضای حوزه‌ی سخن را که اگر جایگزین متغیر و یا متغیرهای گزاره‌نما شوند آن را به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌کند، مجموعه جواب یا مجموعه‌ی درستی گزاره‌نما می‌نامند. نقیض گزاره‌نمای $P(x)$ را با $\sim P(x)$ نمایش می‌دهیم.

اگرچه گزاره‌نماها، گزاره نیستند، اما با اضافه کردن حروفی یا کلماتی با حوزه‌ی سخن می‌توان آن را به یک گزاره تبدیل نمود. در طول شبانه روز، هر کدام از ما، بارها کلماتی همچون « هر »، همه، برای هر، بعضی، حداقل یکی، این کلمات یا حروف میزان کمیت گزاره یا جمله را بیان می‌کند. به این کلمات که کلی یا جزئی بودن گزاره را از همه تا هیچ نشان می‌دهد، سور گفته می‌شود. سور یک کلمه عربی است که معانی همانند « کم » « چندی » « چندی نما » یا « چندی گرا » را برایش تعریف کرده‌اند، که در ریاضی از همان کلمه‌ی سور که به گفتار راحتر و خوشایندتر است، استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. الف: کلماتی همانند «هر»، برای هر، برای همه، به ازای هر را سور عمومی نامیده و با نماد $\forall$ نمایش می‌دهیم .(وارونA) در منطق سوری آن را " کلی جمیعی" می‌نامند.

ب: کلماتی همانند برخی، بعضی، حداقل یکی، را سور وجودی نامیده و با نماد $\exists$ نمایش می‌دهیم .(برعکسE)

ج: کلماتی همانند یک، فقط یک، تنها یک، یکتا، منحصر بفرد را سور یکتایی یا سور انحصاری نامیده و با نماد $\exists!$ نمایش می‌دهیم.

د: کلماتی همانند هیچ، هیچکدام، برای هیچ، به ازای هیچ را سور صفر نامیده و آن را $\nexists$ نمایش می‌دهیم.

حال اگر $P(x)$ یک گزاره‌نما با یک متغیر x در حوزه‌ی سخن X باشد، آنگاه با سورهای تعریف شده به یک گزاره تبدیل می‌شود.

نکته ۱.۳.۱. حالات ممکن گزاره‌هایی که به وسیله‌ی سورها بدست می‌آیند، به صورت زیر نوشته می‌شود.

الف : به ازای هر x $P(x)$:

$$\forall x \in X, P(x)$$

ب : برای بعضی x ها، $P(x)$:

$$\exists x \in X, P(x)$$

البته به صورت « حداقل یک xوجود دارد که $P(x)$» و یا صورتهای مانند این هم بیان می‌شود.

ج: فقط (تنها، منحصربفرد) یک x وجود دارد که $P(x)$

$$\exists ! x \in X, P(X)$$

د: هیچ x ی وجود ندارد که $P(x)$

$$\nexists x \in X, P(x)$$

معمولا گزاره‌های فوق را گزاره‌های سوری می‌نامند. در مواردی که حوزه سخن معلوم است معمولا از آوردن آن صرفنظر می‌کنند.

تذکر ۱.۳.۱. هر گاه مجموعه‌ی جواب، مجموعه‌ی مرجع یا حوزه‌ی سخن باشد. در این صورت گزاره‌های سور عمومی، یک گزاره درست است و در غیر این صورت یک گزاره‌ی نادرست خواهد بود. بدین معنی که گزاره‌ی $\forall x P(x)$، نادرست است هر گاه حداقل یک x در حوزه سخن یافت شود که $P(x)$ یک گزاره‌ی نادرست باشد. و هر گاه مجموعه‌ی جواب، غیرتهی باشد، آنگاه گزاره‌ی گزاره‌ی سور وجودی یک گزاره‌ی درست است و در غیر این صورت یک گزاره‌ی نادرست خواهد بود. یک گزاره‌ی سور یکتایی تنها در صورتی درست است که مجموعه‌ی جواب یک مجموعه‌ی تک

عضویی باشد. یعنی فقط یک عضو از حوزه‌ی سخن در گزاره صدق کند. و یک گزاره‌ی سور صفر تنها در صورتی درست است که مجموعه جواب تهی باشد یعنی هیچ عضوی از حوزه سخن در گزاره نمای $P(x)$ صدق نکند.

مثال ۱.۳.۲. چند مثال برای سور عمومی:

۱. هر پرنده‌ای، بال دارد.

۲. همه انسانها فانی هستند.

۳. مردم شهر تهران نفس می‌کشند. (یعنی هر فردی از تهران نفس می‌کشد.)

۴. مجموع زوایای داخلی هر مثلث در صفحه ۱۸۰ درجه است.

۵. اقطار متوازی الاضلاع، منصف همدیگر هستند.

۶. به ازای هر عدد حقیقی مانند x، $(x+۱)^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$

۷. هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است.

مثال ۱.۳.۳. چند مثال برای سور وجودی:

۱. برخی پرنده‌ها پرواز نمی‌کنند.

۲. بعضی از انسانها، ریاضی‌دان هستند.

۳. بعضی از کردها، در ایران زندگی می‌کنند.

۴. حداقل یک عدد اول فرد وجود دارد.

۵. وجود دارد xهایی از اعداد حقیقی که $x - ۱ \geq ۰$.

۶. توابعی پیوسته هستند که مشتق پذیر نیستند.

مثال ۴.۳.۱. چند مثال برای سوریکتایی:

۱. فقط یک عدد اول زوج وجود دارد.

۲. تنها یک عدد حقیقی موجود است که $۲x + ۱ = ۵$

۳. یک دایره‌ی منحصربفرد موجود است که از راس‌های مثلث ABC می‌گذرد.

۴. یک آفریننده‌ی جهان، وجود دارد.

۵. تا بحال فقط یک ریاضی‌دان کرد هست که جایزه‌ی فیلدز گرفته باشد.

مثال ۵.۳.۱. چند مثال برای سور صفر:

۱. هیچ انسانی بدون قلب نیست.

۲. هیچ کودکی حیله‌گر نیست.

۳. هیچ مثلثی با زاویه‌ی بزرگتر از ۱۸۰ درجه در هندسه اقلیدسی وجود ندارد.

تمام مثالهای فوق درست هستند، اما این بدان معنی نیست که باید هر گزاره‌ی سوری درست باشد. به عنوان مثال هر عدد اول، فرد است یک گزاره‌ی سوری نادرست است.

حال اگر گزاره‌ای سوری نادرست باشد، آنگاه نقیض آن یک گزاره‌ی سوری درست خواهد بود. برای این منظور نیاز به تعریف نقیض گزاره‌ها هستیم. قبلا اشاره شد که یک گزاره‌ی سور عمومی زمانی درست است که مجموعه‌ی جواب، حوزه‌ی سخن باشد و در غیر این صورت، یک گزاره‌ی نادرست است. پس مجموعه‌ی جواب نقیض گزاره‌نما، تهی نیست. یعنی :

$$\sim (\forall x \in X, \qquad P(x)) \equiv \exists x \in X, \sim P(x)$$

به همین صورت، یک گزاره‌ی سور وجودی زمانی نادرست است که مجموعه‌ی جواب تهی باشد.

یعنی مجموعه‌ی جواب نقیض گزاره‌نما، مجموعه‌ی مرجع یا حوزه‌ی سخن گردد. یعنی :

$$\sim (\exists x \in X, \qquad P(x)) \equiv \forall x \in X, \sim P(x) \equiv \nexists x \in X, \quad P(x)$$

برای یک گزاره‌ی سور صفر، می دانیم که مجموعه‌ی جواب تهی است یعنی مجموعه‌ی جواب نقیض گزاره‌نما حوزه سخن است. لذا :

$$\nexists x \in X. \qquad P(x) \equiv \forall x \in X, \quad \sim P(x)$$

پس برای نقیض یک گزاره‌ی سور صفر داریم:

$$\sim (\nexists, P(x)) \equiv \sim (\forall x \in X, \qquad \sim P(x)) \equiv \exists x \in X, \qquad P(x)$$

اما برای نقض گزاره‌ی سور یکتا، قضیه کمی متفاوت است. از آنجا که مجموعه‌ی جواب یک مجموعه‌ی تک عضویی است، لذا باید بیان کرد که مجموعه‌ی جواب تهی یا بیش از یک عضو دارد.

تذکر ۱.۳.۲. باید حوزه‌ی سخن کاملا مشخص و معلوم گردد. به عنوان مثال جمله‌ی « به ازای هر x $x^2 + 1 > 0$ » ، را در نظر بگیرید. این جمله‌ی خبری، نه گزاره است نه گزاره‌نما، زیرا که حوزه‌ی سخن معلوم نیست. اگر x یک عدد حقیقی باشد، یک گزاره‌ی درست بدست می‌آید و اگر x یک عدد مختلط مانند $x = 2i$ باشد، یک گزاره‌ی نادرست بدست می‌آید. زیرا که $i^2 = -1$ و $x^2 + 1 = -3$.

اگر متغیرهای یک گزاره‌نما، بیش از یک متغیر باشد، آنگاه با ترکیب سورها برای هر کدام از متغیرها، می‌توان گزاره‌های جدید ساخت. به عنوان مثال اگر یک گزاره نمای دو متغیره مانند $P(x, y)$ داشته باشیم و حوزه‌ی سخن x، مجموعه‌ی مرجع X و حوزه‌ی سخن y، مجموعه‌ی مرجع Y باشد، در این صورت با ترکیب سورهای عمومی و وجودی می‌توان، ۴ حالت زیر را بدست آورد.

$$۱.\forall x \in X, \qquad \forall y \in Y \quad P(x,y)$$

$$۲.\forall x \in X, \qquad \exists y \in Y \quad P(x,y)$$

$$۳.\exists x \in X, \qquad \forall y \in Y \quad P(x,y)$$

$$۴.\exists x \in X, \qquad \exists y \in Y \quad P(x,y)$$

در دوران متوسطه برای اتحادها و بعضی معادله‌ها از حالت اول و برای حد و پیوستگی و همگرایی از حالت دوم بارها استفاده کرده‌اید.

تذکر ۳.۳.۱. در حالت اول و چهارم از آنجا که هر دو سور از یک نوع هستند جابجایی ایرادی ندارد. اما دقت کنید که در حالت دوم (در مواردی حالت سوم) جای سور عمومی و سور وجودی را نباید عوض کرد. زیرا که معنای آن کاملا عوض خواهد شد. برای توضیح بیشتر عبارت $\forall x \in X \exists y \in Y$ یعنی: یک x دلخواه از مجموعه‌ی X را انتخاب نموده و آن را ثابت در نظر می‌گیریم. حال به ازای آن عدد ثابت دلخواه x حداقل یک y از مجموعه‌ی Y چنان پیدا می‌کنیم که با جایگزینی آن x و y ، $P(x,y)$ یک گزاره‌ی درست باشد، انتخاب y به x وابسته است. اما عبارت $\exists x \in X \forall y \in Y$ یعنی: یک x از مجموعه‌ی X چنان وجود دارد که به ازای هر y از Y، $P(x,y)$ به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌شود، انتخاب y مستقل از انتخاب x است.

مثال ۶.۳.۱. مثالهایی از گزاره‌های سوری ترکیبی:

$$۱.\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x+y)^۲ = x^۲ + ۲xy + y^۲$$

$$۲.\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad ۴x^۲ + ۹y^۲ = ۳۶$$

$$۳.\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x^۲ + y = ۱$$

$۴.\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (\mid x \mid + y)^۲ = y^۲ + ۲y + ۱$

$۵.\forall x \in \mathbb{R}^{>۰}, \exists n \in \mathbb{N}, \quad \frac{۱}{n} < x$

در مثال ۳ اگر جای سور عمومی و سور وجودی را عوض کنید به صورت

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^۲ + y = ۱$$

در می‌آید و این گزاره غلط است زیرا اگر $y = a$ ، آنگاه مربع هر عدد حقیقی برابر است با $۱ - a$ و این کاملا غلط است. مثال ۵ به خاصیت ارشمیدسی معروف است. جابجایی سورها در خاصیت ارشمیدسی نیز به وضوح گزاره‌ای نادرست نتیجه می‌دهد.

تعریف ۳.۳.۱. (تابع) فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی مرجع یا حوزه‌ی سخن باشند. گزاره‌نمای $P(x,y)$ ضابطه‌ی $P(x,y)$ یک تابع نامیده می‌شود هر گاه

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y \quad s.t. \quad P(x,y)$$

معمولا گزاره نمای $P(x,y)$ برای یک تابع را با نماد $y = f(x)$ نمایش می‌دهند. X را دامنه‌ی تابع و Y را هم‌دامنه‌ی تابع می‌نامیم. $s.t.$ مخفف کلمه $such\ that$ به معنای ((به طوری‌که)) یا ((به قسمی‌که)) است.

مثال ۷.۳.۱. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجوعه اعداد حقیقی و $a,b,c \in \mathbb{R}$ سه عدد ثابت باشند. در این صورت گزاره‌های سوری زیر تابع هستند.

$۱.\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad y = ax + b$

$۲.\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad y = ax^۲ + bx + c$

۳. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad y = [x]$

۴. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad y = \mid x \mid$

توابع فوق را به ترتیب تابع خطی، تابع سهمی، تابع جزء صحیح و تابع قدرمطلق می‌نامند.

در ترکیب سوریکتایی و سورعمومی در گزاره‌نمای $P(x,y)$ به صورت

$$\exists! x \in X \forall y \in Y P(x,y)$$

معمولا x عضو خنثای عمل موجود در $P(x,y)$ نامیده می‌شود.

مثال ۱.۳.۸. عضو خنثای عمل جمع و ضرب اعداد حقیقی:

$$\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y$$

$$\exists! x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \times y = y$$

با ترکیب بیشتر سورها، به بیش از دو سور می‌توان مفاهیم بیشتری نیز یادآوری کرد. به عنوان مثال تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{R}$ پیوسته است هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad s.t. \ \forall x \in D_f, \mid x - x_0 \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(x_0) \mid < \epsilon$$

نقیض گزاره‌های سوری مرکب:

برای نقیض گزاره‌های با ترکیب دو سور یا بیشتر، بقیه‌ی جملات بعد از هر سور را به عنوان یک گزاره‌نما در نظر می‌گیریم و آنها را نقض می‌کنیم.

به عنوان مثال :

$$\sim (\forall x \in X, \forall y \in Y, P(x,y))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \sim (\forall y \in Y, P(x,y))$$

$$\equiv \exists x \in X \quad \exists y \in Y \sim P(x,y)$$

و یا

$$\sim (\forall x \in X \quad \exists y \in Y, P(x,y))$$

$$\equiv x \in X, \sim (\exists y \in Y \quad P(x,y))$$

$$\exists x \in X, \forall y \in Y \quad \sim P(x,y)$$

مثال ۹.۳.۱. با سورها، بیان کنید که تابع $y = f(x)$ در $x_\circ$ پیوسته نیست.

$$\sim (\forall \epsilon > \circ, \exists \delta > \circ, \forall x \in X, | x - x_\circ | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x_\circ) | < \epsilon)$$

$$\equiv \exists \epsilon > \circ, \sim (\exists \delta > \circ, \forall x \in X, | x - x_\circ | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x_\circ) | < \epsilon)$$

$$\equiv \exists \epsilon > \circ, \forall \delta > \circ, \sim (\forall x \in X, | x - x_\circ | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x_\circ) | < \epsilon)$$

$$\equiv \exists \epsilon > \circ, \forall \delta > \circ, \exists x \in X, \sim (| x - x_\circ | < \delta \Longrightarrow | f(x) - f(x_\circ) | < \epsilon)$$

$$\equiv \exists \epsilon > \circ, \forall \delta > \circ, \exists x \in X, | x - x_\circ | < \delta \quad \wedge \quad | f(x) - f(x_\circ) | \not< \epsilon$$

$$\equiv \exists \epsilon > \circ, \forall \delta > \circ, \exists x \in X, | x - x_\circ | < \delta \quad \wedge \quad | f(x) - f(x_\circ) | \geqslant \epsilon$$

مثال ۱۰.۳.۱. تابع جزء صحیح $y = [x]$ در نقاط اعداد صحیح پیوسته نیست. زیرا که به ازای هر عدد صحیح k، و هر عدد حقیقی $k - ۱ \leqslant x < k$، $[x] = k - ۱$. لذا اگر $\epsilon = \frac{۱}{۲}$ و $x < k$، درنظر گرفته شود، آنگاه $|[x] - [k]| = ۱ > \frac{۱}{۲}$.

برای مطالعه

در مباحث سور وجودی متوجه می‌شوید که هر سور عمومی، به نوعی یک سور وجودی است اما عکس آن صادق نیست. با حوزه‌ی سخن بیش از یک عضو، نمونه‌هایی از گزاره‌های سور وجودی می‌توان یافت که برای بعضی اعضا، گزاره درست و برای بعضی نادرست است. نماد $\exists|$ را برای این سور بکار برده و گزاره‌ی مربوطه را یک گزاره‌ی سور وجودی محض می‌نامیم. لذا برای چنین حالتی:

$$\exists|x \quad P(x) \equiv \exists x \quad P(x) \wedge \exists x \quad \sim P(x)$$

به عنوان مثال، بعضی مردم چنان می‌اندیشند که هر چه خیر باشد، گواراست و هر چه شر باشد ناگوار است. و در برابر آن هر چه گوارا باشد خیر است و هر چه ناگوار باشد شر است. اما در طول و عرض تاریخ با تجربه‌های زیاد انسان‌ها، این موضوع رد شده است. در مفاهیم دینی در شریعتها این موضوع به عناوین مختلف بیان شده است که « عسی ان تکرهوا شیئا و هو خیر لکم و عسی ان تحبوا شیئا و هو شر لکم » حال اگر این اصل دینی را با منطق سوری بیان کنیم به چنین جمله‌ای برمی‌خوریم که « گوارایی و ناگوارایی با خیر و شر عموم و خصوص من‌وجه هستند نه عموم و خصوص مطلق » . ترکیب دو سور وجودی محض را عموم و خصوص من‌وجه می‌نامند. راستی حوزه سخن در هر جمله، مجموعه‌ی شناخت و مجموعه‌ی برداشت کدامند؟ رابطه‌ی ایرانیان با آسیایی‌ها، رابطه‌ی عموم و خصوص مطلق است. بدین صورت که هر ایرانی، آسیایی است. رابطه‌ی فشردگی و فشردگی موضعی و رابطه‌ی همبندی و همبندی موضعی به ترتیب عموم و خصوص مطلق و من‌وجه است. در منطق ریاضی ترکیب یک سور عمومی با سور وجودی محض است که در سور وجودی مجموعه جواب، حوزه‌ی سخن نیست. رابطه‌ی سور وجودی و سور عمومی نیز چنین است. ترکیب دو سور صفر را تباین می‌نامند. به مثال «هیچ انسانی اسب نیست و هیچ اسبی انسان نیست» توجه کنید .

$$\nexists x \in X \ \nexists y \in Y, P(x,y)$$

۴.۱ استدلال قیاسی و استنتاج منطقی

در تمام علوم پایه و فنی و علوم انسانی و حتی در زبان محاوره و در مجالس و سخنرانی، برای بیان یک موضوع و اثبات درستی یک مطلب موردنظر، فرد، دلیل می‌آورد و به قولی استدلال می‌کند و در نهایت از آن یک نتیجه‌گیری می‌کند. بارها گفته‌ایم و شنیده‌ایم که سخنان فلانی، منطقی بود، یعنی فرد برپایه‌ی یک سری گزاره‌های منطقی درست، یک استنتاج منطقی که درستی آنها در نظر همه محرز است، صحبت کرده است.

همچنانکه می‌دانید در هر شاخه از ریاضیات، دنیایی از قضایا و احکام وجود دارد که بر پایه‌ی روش‌های اثبات، درستی آنها را ثابت، و از آن به نتایجی ارزشمند رسیده‌اند. در ریاضی چقدر مفاهیم و قضایا مهم و ارزشمندند، ارائه و آفرینش روش اثبات آنها نیز به همان اندازه مهم و اساسی است.

استنتاج منطقی، که آن را قیاس نیز می‌نامند، یعنی: از یک یا چند گزاره که آنها را درست فرض می‌کنیم، به یک نتیجه‌ی درست برسیم. اثبات یک حکم، یا یک قضیه ارائه‌ی استدلالهای قانع کننده به روش‌های استاندارد با استفاده از قوانین هم‌ارز و استلزام‌های ثابت شده در جبر گزاره‌ها است.

به تناسب اینکه حکم یا قضیه کدام است و چه فرضهایی دارد و می‌خواهد به چه نتیجه‌ای برسد، روش اثبات متفاوت است. در یک قضیه یا استلزام به صورت $p \Longrightarrow q$ ، p را فرض و q را حکم یا نتیجه و روش برهان و اثبات را روش قیاسی یا استدلال قیاسی می‌نامند. ممکن است p ترکیب عطفی از گزاره‌های مرکب باشد و q نیز یک گزاره‌ی مرکب باشد. اما در یک قضیه‌ی دو شرطی به صورت $p \Longleftrightarrow q$ معادل بودن دو گزاره مبنای اثبات است. هر کدام فرض در نظر گرفته شود دیگری حکم است. در چنین مواردی از قوانین ثابت شده استفاده می‌شود.

مثال ۱.۴.۱. با روش استدلال قیاسی ثابت کنید.

$$(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r) \equiv (p \vee q) \longrightarrow r$$

$(p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r) \equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q)$ بنابه رابطه‌ی شرطی و فصلی

$\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q)$ بنابه قانون توزیع پذیری

$\equiv r \vee \sim (p \vee q)$ بنابه قانون دمورگان

$\equiv (p \vee q) \longrightarrow r$ بنابه رابطه‌ی شرطی و فصلی

استنتاج با مفروضات $p_1, p_2, ..., p_n$ و حکم Q را معمولا به یکی از صورت‌های زیر می‌نویسند.

۱.$(p_1 \wedge p_2 ... \wedge p_n) \Longrightarrow Q$ یا ۲.$p_1, p_2, ..., p_n \Longrightarrow Q$ و یا ۳.$p_1 \& p_2 ... \& p_n / \therefore Q$

مثال ۲.۴.۱. با استدلال قیاسی ثابت می‌کنیم که استنتاج زیر منطقی است.

اگر هوا بارانی باشد (p)یا کسی به مجلس جشن نیاید(q)، آنگاه جشن با شکست مواجه می‌شود(r).

جشن با شکست مواجه نشد. پس هوا بارانی نبوده است.

اگر گزاره‌ها را با نماد ریاضی بنویسیم به صورت زیر درمی‌آید.

$((p \vee q) \longrightarrow r) \wedge \sim r \Longrightarrow \sim p$ و یا به صورت $((p \vee q) \longrightarrow r)$

$\wedge \sim r$

$------$

$\therefore \sim p$

بنا به قانون قیاس دفع نتیجه می‌گیریم؛ $((p \vee q) \longrightarrow r) \wedge \sim r / \therefore \sim (p \vee q)$

بنابه قانون دمورگان $(\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q)$ و قانون حذف عاطف $(\sim p \wedge \sim q \Longrightarrow \sim p)$

استنتاج منطقی است، یعنی هوا بارانی نبوده است.

روشهای اثبات:

۱. روش اثبات مستقیم : برای اثبات گزاره‌ی شرطی $p \longrightarrow q$ ، با فرض درست بودن p و با استفاده‌ی مستقیم از تعاریف و قضایای ثابت شده‌ی قبلی درستی q را نتیجه می‌گیریم. بدیهی است که اگر p نادرست باشد، آنگاه در هر صورت گزاره‌ی شرطی $p \longrightarrow q$ درست است. لذا تنها حالت مورد بحث همان فرض درستی p است.

مثال ۱.۴.۳. حاصل‌ضرب هر عدد صحیح زوج در یک عدد صحیح، زوج است.

برهان. بیان قضیه به صورت یک گزاره‌ی شرطی بدین صورت است که اگر x زوج و y یک عدد صحیح دلخواه باشد، آنگاه xy زوج است.

فرض می‌کنیم $x = 2k$ و y یک عدد صحیح دلخواه باشد. در این صورت $xy = 2k \times y = 2ky$
پس xy ضریبی از عدد ۲ است و یعنی زوج است. $\square$

مثال ۱.۴.۴. عدد صحیح x زوج است اگر و تنها اگر x^2 یک عدد صحیح زوج باشد.

برهان. برای اثبات این قضیه‌ی دو شرطی از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم.

$p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$ و معادل آن $p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (\sim p \longrightarrow \sim q)$

پس ابتدا فرض می‌کنیم x یک عدد زوج باشد. در این صورت $k \in \mathbb{Z}$ چنان موجود است که $x^2 = x.x = 2k \times 2k = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ و x^2 زوج است. حال فرض می‌کنیم x فرد باشد. پس $k \in \mathbb{Z}$ چنان موجود است که $x = 2k + 1$. بنابراین $x^2 = x.x = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. لذا x^2 فرد است. $\square$

۲. روش اثبات عکس نقیض : در قوانین هم‌ارز گزاره‌های شرطی دیدیم که

$$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$$

گزاره‌ی $\sim q \longrightarrow \sim p$ را عکس نقیض $p \longrightarrow q$ می‌نامیم. لذا برای اثبات $p \Longrightarrow q$ از هم‌ارز آن یعنی عکس نقیض آن استفاده می‌کنیم. در این روش، فرض می‌کنیم که حکم غلط باشد و نتیجه می‌گیریم که فرض نادرست است .

مثال ۱.۴.۵. فرض کنید x یک عدد صحیح باشد. در این صورت اگر x^{2} فرد باشد، آنگاه x فرد است.

برهان. از روش عکس نقیض استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم x زوج باشد، ثابت کنیم x^{2} نیز زوج است. □

۳. روش برهان خلف : در قوانین هم‌ارز گزاره‌های شرطی دیدیم که

$$p \longrightarrow q \equiv q \vee \sim p \equiv \sim (p \wedge \sim q)$$

لذا $\sim (p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ قانون برهان خلف نیز به صورت زیر است.

$$p \longrightarrow q \equiv (p \wedge \sim q) \longrightarrow (q \wedge \sim p)$$

با جایگذاری هم‌ارزی فوق برهان خلف را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$p \longrightarrow q \equiv \sim (p \longrightarrow q) \longrightarrow \sim (q \longrightarrow p)$$

بنابراین در روش برهان خلف برای اثبات درستی یک گزاره‌ی شرطی فرض می‌کنیم که آن گزاره نادرست باشد و نشان می‌دهیم که $q \longrightarrow p$ نیز نادرست است و به طور خلاصه به نادرستی p می‌رسیم و یا یک گزاره‌ی همیشه درست را نقض می‌کنیم.

فرض نادرستی گزاره‌ی $q \longrightarrow p$ را فرض خلف می‌نامیم. می‌دانید که یک گزاره‌ی شرطی تنها در صورتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

مثال ۱.۴.۶. ثابت کنید که $\sqrt{۲}$ ، گنگ است.

برهان. فرض خلف است که فرض می‌کنیم که $\sqrt{۲}$ یک عدد گویاست. یعنی $\sqrt{۲} = m/n$ که m و n دو عدد طبیعی هستند و نسبت به هم اولند. حال اگر مربع طرفین را بدست آوریم $۲ = m^۲/n^۲$ یعنی $m^۲ = ۲n^۲$ پس $m^۲$ زوج است، لذا m زوج است پس یک k ی طبیعی چنان موجود است که $m = ۲k$ و $m^۲ = ۴k^۲ = ۲n^۲$. بنابراین $n^۲ = ۲k^۲$ یعنی n نیز زوج است و این بدین معنی است که m و n نسبت به هم اول نیستند و این یک تناقض است. $\square$

مثال ۱.۴.۷. ثابت کنید که اگر x یک عدد حقیقی غیرصفر باشد، آنگاه $۱/x$ نیز غیر صفر است.

برهان. فرض می‌کنیم که گزاره‌ی شرطی نادرست باشد، یعنی $x \neq ۰$ و $۱/x = ۰$ لذا $x.۱/x = ۰$ از طرفی $x.۱/x = ۱$ پس ۱ = ۰ بدست می‌آید و این یک تناقض است. $\square$

۴. اثبات به روش حالات : با تعمیم هم‌ارزی موجود در مثال (*) هم‌ارزی زیر بدست می‌آید. فرض کنیم $p_۱, p_۲, ..., p_n$ و Q گزاره باشند در این صورت :

$(p_۱ \longrightarrow Q) \wedge (p_۲ \longrightarrow Q) \wedge ... \wedge (p_n \longrightarrow Q) \equiv (p_۱ \vee p_۲ \vee ... \vee p_n) \longrightarrow Q$ یعنی گزاره‌ی شرطی اگر هر کدام از گزاره‌های $p_۱, p_۲, ..., p_n$ درست باشد، آنگاه گزاره‌ی Q لازم است تمام حالات ممکن $p_۱ \longrightarrow Q$ ، ...، $p_n \longrightarrow Q$ درست باشند. این نوع روش اثبات به اثبات به روش حالت‌ها معروف است. لازم به ذکر است که در این روش تعداد حالات، متناهی است.

مثال ۱.۴.۸. اگر x یک عدد صحیح باشد، آنگاه $x^۲ + x$ زوج است.

برهان. برای x دو حالت ممکن است :

الف : x فرد باشد. در اینصورت $x^۲$ نیز فرد است و مجموع دو عدد فرد یک عدد زوج است پس $x^۲ + x$ زوج است. اگر $x = ۲k + ۱$ ، آنگاه

$$x^۲ + x = (۲k + ۱)^۲ + (۲k + ۱) = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۲k + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۳k + ۱)$$

ب: x زوج باشد. در این صورت $x^۲$ نیز زوج است و مجموع دو عدد زوج، زوج است.

$$x = ۲k \Longrightarrow x^۲ + x = ۴k^۲ + ۲k = ۲(۲k^۲ + k)$$ □

مثال ۹.۴.۱. تعداد اعداد اول، نامتناهی است.

برهان. فرض می‌کنیم که تعداد اعداد اول متناهی باشند. فرض کنید تمام اعداد اول، $p_۱, p_۲, ..., p_n$ باشد. ثابت می‌کنیم عدد $p_۱ \times p_۲ \times ... \times p_n + ۱$ یک عدد اول است. اگر اول نباشد، آنگاه بر یکی از اعداد اول $p_۱, p_۲, ..., p_n$، مانند p_k بخش پذیر است. لذا تفاضل $p_۱ \times p_۲ \times ... \times p_n + ۱$ و $p_۱ \times p_۲ \times ... \times p_n$ یعنی ۱ نیز بر p_k بخش پذیر است و این یک گزاره‌ی نادرست است. □

۵. روش اثبات گزاره‌های سوری:

الف.روش اثبات گزاره‌های سور عمومی: $\forall x \in X, P(x)$

در روش اثبات گزاره‌های با سور عمومی باید فرض کنید x یک عضو دلخواهی از حوزه‌ی سخن است و آن را ثابت در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که گزاره‌ی $P(x)$، درست است. از آنجا که x را دلخواه انتخاب کرده‌ایم پس گزاره نمای $P(x)$ برای هر عضو از حوزه‌ی سخن درست است پس گزاره‌ی $\forall x \in X, P(x)$ درست است.

مثال ۱۰.۴.۱. ثابت کنید اقطار هر متوازی الاضلاع، همدیگر را نصف می‌کنند.

برهان. فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی الاضلاع دلخواه باشد. دو قطر AC و BD همدیگر را در نقطه‌ی M قطع می‌کنند. دو مثلث AMD و BMC به حالت دو زاویه و ضلع بین با هم همنهشت هستند. لذا $AM = MC$ و $BM = MD$. □

ب.روش اثبات گزاره‌های سور وجودی: $\exists x \in X, P(x)$

در این روش، ثابت می‌کنیم که حداقل یک عضو از حوزه‌ی سخن وجود دارد که گزاره‌ی $P(x)$ در مورد آن درست است . اثبات وجود یک عضو در بعضی حالت ساده و ارائه یک مثال واقعی و عینی است.

مثال ۱۱.۴.۱. حداقل یک عدد اول زوج وجود دارد.

مثال ۱۲.۴.۱. معادله‌ی $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ جواب دارد.

مثال ۱۳.۴.۱. بعضی ریاضی‌دانان ایرانی، جایزه‌ی فیلدز گرفته‌اند.

در بعضی حالات امکان مثال عینی وجود ندارد، اما می‌توان روشی برای اثبات وجود حداقل یک عضو که گزاره‌ی $P(x)$ در مورد آن صادق باشد، ارائه داد.

به یاد دارید که

$$\sim (\forall x \in X, P(x)) \equiv \exists x \in X, \sim P(x)$$

یعنی اگر بخواهیم ثابت کنیم که یک سور عمومی برای یک گزاره نمای $P(x)$ در حوزه‌ی سخن X درست نیست، کافی است ثابت کنیم که یک عضو x از مجموعه‌ی مرجع X چنان یافت می‌شود که $P(x)$ در مورد آن نادرست است.

مثال ۱۴.۴.۱. هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی عکس آن صادق نیست. یعنی یک گزاره‌ی سورعمومی وجود دارد که هر تابع مشتق پذیر پیوسته است و یک گزاره‌ی سور وجودی هست که بعضی توابع پیوسته، مشتق پذیر نیستند.

برهان. برای اثبات قسمت اول فرض می‌کنیم که $y = f(x)$ یک تابع دلخواه مشتق پذیر باشد، در این صورت

$$f'(x_\circ) = lim_{x \longrightarrow x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

پس

$$lim_{x \longrightarrow x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$$

پس f در $x_\circ$ پیوسته است.

برای قسمت دوم مثالهای خیلی زیادی همچون $y = \mid x \mid$ می‌توان زد که پیوسته هستند اما حداقل در یک نقطه مشتق پذیر نیستند.

برای حالت ترکیبی از دو سور عمومی و وجودی همچون $\forall x \in X \ \ \exists y \in X, \ \ P(x, y)$ باید یک x دلخواه و ثابت انتخاب کنیم. سپس به ازای آن x حداقل یک y چنان بیابیم که $P(x, y)$ درست باشد. □

مثال ۱۵.۴.۱. ثابت کنید که تابع $f(x) = ۲x + ۳$ در $x = ۱$ پیوسته است.

برهان. برای اثبات پیوستگی تابع f باید

$$\forall \epsilon > \circ \ \ \exists \delta > \circ \ \ s.t. \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \mid x - ۱ \mid < \delta \Longrightarrow \mid f(x) - f(۱) \mid < \epsilon$$

حال $\epsilon > 0$ را دلخواه و ثابت در نظر می‌گیریم. باید به ازای این ϵ یک $\delta > 0$ چنان پیدا کنیم که گزاره‌ی فوق، یک گزاره‌ی درست باشد. حال باید $f(1) = 5$

$$| f(x) - f(1) | = | 2x + 3 - 5 | = | 2x - 2 | = 2 | x - 1 | < \epsilon$$

لذا $| x - 1 | < \epsilon/2$. بنابراین اگر $\delta \leqslant \epsilon/2$ انتخاب شود، آنگاه به ازای x که در نامساوی $| x - 1 | < \delta$ صدق کند،

$$| x - 1 | < \epsilon/2 \Longrightarrow | f(x) - f(1) | = 2 | x - 1 | < \epsilon$$

پس برای هر $\epsilon > 0$ حداقل یک $\delta > 0$ یافت می‌شود که با جایگذاری آنها در گزاره‌ی شرطی به یک گزاره‌ی درست دست می‌یابیم. در نتیجه تابع $f(x) = 2x + 3$ در نقطه $x = 1$ پیوسته است. البته می‌توان در هر نقطه‌ی دلخواه $x = x_0$ به همین منوال پیوستگی را بررسی و ثابت کرد. $\square$

ج. اثبات گزاره‌هایی سور یکتایی: $\exists! x \in X, P(x)$

از کلمات « وجود یکتا » واضح است که باید ابتدا عضو x از حوزه‌ی سخن X را پیدا کنیم که $P(x)$ درست باشد و یا به طریقی دیگر اگر $y \in X$ چنان موجود باشد که $P(y)$ درست باشد، آنگاه ثابت می‌کنیم $x = y$

مثال ۱.۴.۱۶. تنها یک عدد اول زوج وجود دارد.

۲ یک عدد اول زوج است. حال اگر p یک عدد اول زوج دیگر باشد، آنگاه p بر ۲ بخش پذیر است لذا p اول نیست یا $p = 2$.

مثال ۱.۴.۱۷. معادله‌ی $2x + 1 = 5$ یک جواب منحصربفرد دارد.

$$۲x + ۱ = ۵ \Longleftrightarrow ۲x = ۵ - ۱ = ۴ \Longleftrightarrow x = ۴/۲ = ۲$$

د.روش اثبات گزاره‌ی سور صفر: $\nexists x \in X, P(x)$

در مبحث نقیض گزاره‌های سوری و گزاره‌های معادل آن، می‌دانیم

$$\nexists x \in X, P(x) \equiv \forall x \in X \quad \sim P(x)$$

پس سور صفر، صورتی از گزاره‌های سور عمومی است که دیگر نیاز به بحث بیشتر نیست.

۵.۱ استقرای ریاضی

اگرچه، استقرای ریاضی، حالت خاصی از اثبات گزاره‌های با سورعمومی است، اما به دلیل کاربرد زیاد آن در تمامی شاخه‌های ریاضی، همیشه این موضوع را به عنوان مطلبی مستقل بیان می‌کنیم.

فرض کنید که حوزه سخن مجموعه‌ی اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ ، باشد. و $P(n)$ یک گزاره‌نما با حوزه‌ی سخن $\mathbb{N}$ باشد. در استقرای ریاضی می‌خواهیم ثابت کنیم « $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$» یعنی برای عدد طبیعی n ، $P(n)$ درست است. برای اثبات این گزاره‌ی سورعمومی باید دو کار انجام دهیم :

۱ : ابتدا ثابت می‌کنیم که $P(۱)$ درست است. یعنی قدم اول و شروع کار درست است.

۲ : به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ ، ثابت می‌کنیم اگر $P(k)$ درست باشد، آنگاه $P(k + ۱)$ نیز درست است. بدین معنی که اگر فرض کنیم هر قدم درست باشد، آنگاه قدم بعدی نیز درست است.

حال با این کار چونکه از ابتدا قدم اول را درست نهاده‌ایم و ثابت کرده‌ایم که قدم بعدی نیز درست نهاده می‌شود، پس هر قدم و هر مرحله درست است. معمولا $P(۱)$ را جمله‌ی اول و $P(k)$ را جمله‌ی k ـ م می‌نامیم.

این روش اثبات را اثبات به روض استقراء می‌نامند و گفته می‌شود که بنابر استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $P(n)$ درست است. در روش استدلال قیاسی داریم :

$$(P(1) \bigwedge \forall k \in \mathbb{N} \quad P(k) \Rightarrow P(k+1)) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

مثال ۱.۵.۱. به روش استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ،

$$1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که جمله‌ای اول درست است .

$$p(1): \qquad 1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=1$$

فرض استقراء : فرض می‌کنیم $P(n)$ به ازای $n=k$ درست است یعنی

$$1+2+3+...+k=\frac{k\times(k+1)}{2}$$

حکم استقرا : ثابت می‌کنیم $P(n)$ به ازای $n=k+1$ درست است یعنی

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

از فرض استقرا استفاده می‌کنیم و به طرفین استقرا عدد $k+1$ اضافه می‌کنیم پس داریم :

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k\times(k+1)}{2}+k+1$$

مخرج مشترک گرفته و بدست می‌آوریم

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k\times(k+1)+2\times(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

و حکم ثابت می‌شود. □

مثال ۱.۵.۲. با استقرا ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی n :

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم جمله‌ای اول درست است.

$$P(1): \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 6/6 = 1$$

فرض استقرا : فرض می‌کنیم $P(n)$ به ازای $n = k$ درست است. یعنی

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

حکم استقرا : ثابت می‌کنیم $p(n)$ به ازای $n = k+1$ درست است. یعنی

$$1^2 + 2^2 + ... + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

برای اثبات حکم، به طرفین فرض $(k+1)^2$ اضافه می‌کنیم داریم:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)(2k+1)6(k+1)^2}{6} = ... =$$

$$\frac{(k+1)(k+1+1)(2\times(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \qquad \square$$

در بعضی حالات به جای حوزه‌ی سخن مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ ، از مجموعه‌ی اعداد حسابی $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ و یا زیرمجموعه‌ی $X = \{m, m+1, m+2, ...\}$ از اعداد صحیح استفاده می‌شود که در این صورت استقرای ریاضی به صورت زیر خواهد بود.

۱. ثابت می‌کنیم $p(m)$ درست است.

۲. به ازای هر عدد صحیح $k \geqslant m$ ، اگر $p(k)$ درست باشد، آنگاه ثابت می‌کنیم $P(k+۱)$ نیز درست است.

در این صورت بیان می‌کنیم: بنابه استقرای ریاضی به ازای هر عدد صحیح $n \geqslant m$ ، $p(n)$ درست است.

مثال ۳.۵.۱. با استقرای ریاضی ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۳$ ، $۳n + ۱ < ۳^n$.

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

مثال ۴.۵.۱. به روش استقرای ریاضی ثابت کنید که به ازای هر $n \geqslant ۴$ ، $n^۳ < ۳^n$.

برهان. جمله‌ی اول به ازای $n = ۴$ است. بدیهی است که $۴^۳ = ۶۴ < ۸۱ = ۳^۴$

فرض استقرا : فرض می‌کنیم به ازای $k > ۴$ ، $P(k)$ درست باشد، یعنی: $k^۳ < ۳^k$

حکم استقرا : ثابت کنیم $P(k+۱)$ درست است. یعنی $(k+۱)^۳ < ۳^{k+۱}$

بنابه فرض استقرا از آنجاکه $k \geqslant ۴$ پس $۳k^۲ < k^۳ < ۳^k$ و بنابه مثال فوق $۳k + ۱ < ۳^k$ بنابرین

$$(k+۱)^۳ = k^۳ + ۳k^۲ + ۳k + ۱ < ۳^k + ۳^k + ۳^k = ۳^{k+۱}$$

□

در بعضی از حالات در اثبات به روش استقرای ریاضی نیاز به آن است که در گزاره‌ی شرطی فرض کنیم به ازای هر $m < n$ ، $P(m)$ درست باشد، آنگاه ثابت کنیم که $P(n)$ درست است. این نوع استقرا را استقرای قوی ریاضی می‌نامیم.

مثال ۵.۵.۱. هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را می‌توان به حاصل‌ضرب اعداد اول تبدیل کرد.

برهان. جمله‌ی اول گزاره به ازای $n = ۲$ است. ۲ یک عدد اول است پس حاصل‌ضرب عدد اول است.

فرض استقراء : فرض می‌کنیم که به ازای هر $m < n$ ، گزاره درست باشد. یعنی هر عدد طبیعی کمتر از n به حاصل‌ضرب اعداد اول، تبدیل شود.

حکم استقرا : ثابت می‌کنیم که گزاره به ازای n نیز درست است. یعنی ثابت می‌کنیم که n به حاصل‌ضرب اعداد اول تبدیل می‌شود.

برای n دو حالت موجود است :

۱. n اول باشد، که در این صورت حکم ثابت است.

۲. n اول نباشد. در این صورت n مقسوم علیه‌های غیر از یک و خودش را دارد لذا $n = a \times b$ که $n > a, b > ۱$. بنابه فرض a و b به صورت حاصل ضرب اعداد اول مانند $a = p_۱ \times p_۲ \times \ldots \times p_k$ و $b = q_۱ \times q_۲ \times \ldots \times q_t$ هستند. بنابراین $n = p_۱ \times p_۲ \times \ldots \times p_k \times q_۱ \times q_۲ \times \ldots \times q_t$ یعنی n نیز حاصل ضربی از اعداد اول است و حکم ثابت شد. □

برای مطالعه:

هنگام نقد و بررسی یک سخنرانی یا یک نوشته، شنیده‌اید که منتقد از کلماتی همچون مغالطه، سفسطه، دوپهلو و تعارض استفاده کرده است. این کلمات در منطق ریاضی نیز معنی دارند.

مغالطه یک استنتاج نادرست است که با یک استنتاج درست اشتباه می‌شود. به عنوان مثال اگر قوانین قیاس را به صورت زیر تغییر دهیم، نوعی مغالطه بدست خواهد آمد.

۱.$(p \longrightarrow q) \bigwedge q \longrightarrow p$

۲.$(p \longrightarrow q) \bigwedge \sim p \longrightarrow \sim q.$

گزاره شرطی اگر تابع f مشتقپذیر باشد، آنگاه پیوسته است را با تابع f پیوسته است و یا مشتقپذیر نیست ترکیب عطفی کنید. نمونه‌ای دیگر از مغالطه به صورت زیر است.

$(p \vee q) \bigwedge p \longrightarrow \sim q$ البته اگر ترکیب فصلی به ترکیب فصل بلاعطف تبدیل شود یک استنتاج منطقی بدست می‌آید.

سفسطه، عبارت دو پهلو و تعارض چند نوع مغالطه هستند. در سفسطه یک قانون منطقی به درستی یا کامل بیان نمی‌شود. در سفسطه معمولا جملاتی خبری که در آن معانی متفاوت و یا سلیقه‌ای دارند به عنوان گزاره استفاده می‌شوند. عبارت مشهور ((دیوار موش دارد، موش هم گوش دارد. پس دیوار گوش دارد.)) نوعی سفسطه است. جملاتی مانند ((اگر احمد با اخلاق باشد، آنگاه با عصبانیت و کلمات تند و رکیک صحبت نمی‌کند. چونکه احمد با حاکمان با عصبانیت و کلمات تند و رکیک صحبت کرد پس با اخلاق نیست.)) نوعی سفسطه است. عبارت دو پهلو نوعی مغالطه است که نتیجه‌ی آن به شرایط گزاره‌ها بستگی دارد و در حالت کلی نه درست و نه نادرست است. در تعارض، معمولا از مفروضاتی استفاده می‌شود که نسبت به هم ناسازگارند. در بعضی از تعارضها،

یکی از فرضها محتوای خود را نفی می‌کند. عبارت ((امیدوارم این دروغت هم راست باشد.)) یک تعارض است. موقعی که مجموع همه اعضای حوزه سخن ــ نه تک تک اعضا ــ درنظر گرفته شود، از سور مجموع استفاده شده و آن را با نماد $\sum$ نمایش می دهیم. تمام مجموع‌ها و سری‌های نامتناهی در ریاضی از نوع سور مجموع هستند. در منطق سوری آن را "کلی مجموعی" می‌نامند. **مثال:** ۱. مردم شهر سنندج روزانه نیم میلیون لیتر آب می‌نوشند. ۲. عالم متغیر است. یکی دیگر از مغالطه‌ها تغییر سور مجموع به سور عمومی است. در مثال اول اگر سور مجموع به سور عمومی معنی شود، خیلی خنده‌دار خواهد شد، یعنی هر فردی نیم میلیون لیتر آب می‌نوشد. این مثال را با مثال مردم شهر تهران نفس می‌کشند، مقایسه کنید تا اختلاف ماهیتی این دو سور را بهتر درک کنید. در مثال " عالم متغیر است" اگر سور مجموع را به سور عمومی معنی کنیم، بدین معنی خواهد شد که "هرچیزی تغییر می‌کند و هیچ چیزی ثابت نیست" که به وضوح محتوای جمله خودش را نقض می‌کند. زیرا که خود جمله نیز باید تغییر کند، یعنی بعضی چیزها ثابتند. "اصل تغییر" یکی از اصول دیالکتیک اسلامی است که در مفهوم سور مجموع بکار برده می‌شود. به وضوح تمام قوانین ریاضی ثابت هستند.

امیدوارم به چنان فهم و بینشی برسیم که استنتاج منطقی و مغالطه را از هم بازشناسیم و مغالطه را از هیچ کس قبول نکنیم، تا فریب نخوریم و ابزار دست مزوران و دنیاپرستان خداناپرست نشویم.

تمرین

۱. قضیه ۱.۲.۱ را با استفاده از جدول ارزش درستی ثابت کنید.

(قوانین خودتوانی، جابجایی و شرکت‌پذیری را با استفاده از جدول ارزش درستی ثابت کنید.)

۲. عکس نقیض گزاره‌های شرطی زیر را بنویسید.

الف: اگر عدد صحیح x وجود داشته باشد که $x^2 = -1$، آنگاه در درس مبانی ریاضی ۲۰ می‌شوم.

ب: اگر دو خط در صفحه اقلیدسی موازی نباشند، آنگاه همدیگر را قطع می کنند.

اگر تابع f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f پیوسته است.

۳. قسمت (ب) قانون دمورگان را ثابت کنید.

۴. نتیجه ۱.۲.۱ را ثابت کنید. به عبارتی ثابت کنید که ترکیب متضاد و نفی متصل از ترکیب‌های اصلی بدست می‌آیند.

۵. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها ثابت کنید.

$$p \longrightarrow q \equiv \sim q \longrightarrow \sim p \equiv q \vee \sim p$$

۶. با استفاده از قوانین ثابت شده‌ی قبل، قوانین توزیع‌پذیری زیر را ثابت کنید.

قسمت (پ) قضیه‌ی ۳.۲.۱ آورده شود.

۷. قانون برهان خلف را ثابت کنید.

۸. برای قانون تفکیک دو مقدم، دو مثال بیاورید.

۹. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، ثابت کنید.

$$p \longleftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$$

۱۰. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، ثابت کنید که

"نقیض ترکیب دو شرطی، همان ترکیب فصل بلاعطف است."

۱۱. با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، قوانین زیر را ثابت کنید.

الف: قانون جمع ب: قانون اختصار

ج: قانون رفع مؤلفه د: قانون قیاس

ه: قانون تعدی در ترکیب گزاره‌های شرطی

۱۲. قوانین هیلبرت را با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها ثابت کنید.

۱۳. قوانین راسل را با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها ثابت کنید.

۱۴. گزاره‌ی $p \vee q$ چگونه شرطی برای گزاره‌های زیر است:

الف: p ب: $\sim p \longrightarrow q$

۱۵. با استفاده از ترکیب گزاره‌های سوری، بیان کنید که معادله‌ی $y = x^3$ یک تابع است.

۱۶. با استفاده از نقیض ترکیب گزاره‌های سوری، بیان کنید که معادله‌ی یک دایره به صورت $x^2 + y^2 = 1$ یک تابع نیست.

۱۷. با استفاده از ترکیب گزاره‌های سوری بیان کنید که دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n}$ به صفر همگراست.

۱۸. با استفاده از نقیض ترکیب گزاره‌های سوری بیان کنید که دنباله‌ی $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ به صفر همگرا نیست.

۱۹. در گزاره‌نماهای زیر حوزه سخن را اعداد حقیقی در نظر بگیرید و برای هر گزاره‌نما، سورهایی بکار ببرید که آن گزاره‌نما را به یک گزاره درست تبدیل کند.

الف: $۱ + \tan^{۲} x = \sec^{۲} x$

ب: $x^{۲} - y^{۲} = (x-y)(x+y)$

ج: $x^{۲} + ۵x + ۶ = ۰$

د: $|x-y| \leqslant |x| - |y|$

ه: $x + y = ۰$

۲۰. بحث و استنتاج زیر را با نمادهای ریاضی نوشته و درستی آن را بررسی کنید.

اگر قوانین سخت و خشن باشند، مردم بی‌رحم می‌شوند. اگر مردم بی‌رحم شوند، از اندیشه‌های خوب محروم می‌شوند. مردم از اندیشه‌های خوب محروم نمی‌شوند یا وحدت خود را از دست می‌دهند. اگر مردم به اسارت کشیده نشوند، وحدت خود را از دست نمی‌دهند. در نتیجه اگر قوانین سخت و خشن باشند، مردم به اسارت کشیده می‌شوند.

۲۱. استنتاج‌های زیر را ثابت کنید.

الف:

$$\begin{array}{ll} & p \vee (q \to r) \\ \& & p \to s \\ \& & \sim s \to (r \to u) \\ \& & \sim s \\ \hline & \therefore q \to u \end{array}$$

ب:

$$\begin{array}{ll} & p \wedge (q \vee s) \\ \& & p \to (s \to u) \\ \& & p \to (q \to r) \\ \& & \sim r \\ \hline & \therefore u \end{array}$$

۲۲. با روش اثبات مستقیم ثابت کنید که در هر مثلث

الف: نیمسازهای زوایا همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

ب: میانه‌های اضلاع همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

ج: عمودمنصف‌های اضلاع همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

۲۳. با روش عکس نقیض ثابت کنید که اگر دو نیمساز داخلی یک مثلث با هم برابر نباشند، آنگاه مثلث متساوی‌الساقین نیست.

۲۴. با روش برهان خلف ثابت کنید که اگر دو عدد طبیعی a و b نسبت به هم اول باشند، آنگاه $s = a + b$ و $p = a \cdot b$ نیز نسبت به هم اولند.

۲۵. با روش اثبات به روش حالات ثابت کنید که اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی نصف کمان روبرو به آن است.

۲۶. ثابت کنید که دو عدد گنگ a و b وجود دارند که a^b گویاست.

۲۷. به ازای هر عدد حقیقی مثبت a ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

۲۸. ثابت کنید در حوزه اعداد حقیقی معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ جواب دارد، اما $x^2 + x + 1 = 0$ جواب ندارد.

۲۹. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید. به ازای هر عدد طبیعی n،

الف: $(1 + 2 + 3 + \cdots n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

ب: $1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

ج: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$

د: $1 \times 3 \times 5 ... (2n - 1) \leq n^n$

ه: $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \in \mathbb{N}$

و: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n}$

۳۰. فرض کنید که $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ و $0! = 1$ و به ازای هر دو عدد طبیعی $k \leqslant n$ تعریف کنید:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

حال با استقرای ریاضی ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

۳۱. **قضیه‌ی بسط دوجمله‌ای:** اگر x و y دو متغیر و n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

قضیه‌ی بسط دوجمله‌ای را با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید.

۳۲. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر $a \neq 1$ و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

۳۳. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، به ازای هر $n \geqslant 2$،

$$(1+a)^n > 1 + na$$

۳۴. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، به ازای هر عدد طبیعی $n \geqslant 3$،

الف: $3n + 1 < 3^n$

ب: $n^2 < 2^n$

ج: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$

۳۵. فرض کنید x و y دو متغیر باشند. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-۱} + x^{n-۲} \cdot y + \cdots + x \cdot y^{n-۲} + y^{n-۱})$$

۳۶. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، مشتق مرتبه‌ی nام، $y = \sin x$ برابر است با

$$y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{۲})$$

۳۷. با دو روش استقرا و مستقیم ثابت کنید، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$cos\alpha + cos۳\alpha + \cdots + cos(۲n-۱)\alpha = \frac{sin۲n\alpha}{۲sin\alpha}$$

۳۸. با استفاده از استقرا ثابت کنید، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، عدد $۴^n + ۵$ بر ۳ بخشپذیر است.

۳۹. فرض کنید، x و y دو عدد نامنفی باشند. با استفاده از استقرا ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$(\frac{x+y}{۲})^n \leq \frac{x^n + y^n}{۲}$$

۴۰. با استفاده از استقرا قوانین دمورگان را تعمیم دهید.

الف: $\sim (p_۱ \wedge p_۲ \wedge ... \wedge p_n) \equiv \sim p_۱ \vee \sim p_۲ \vee ... \vee \sim p_n$

ب: $\sim (p_۱ \vee p_۲ \vee ... \vee p_n) \equiv \sim p_۱ \wedge \sim p_۲ \wedge ... \wedge \sim p_n$

۴۱. با استفاده از استقرا قوانین توزیعپذیری ترکیب‌های فصل و عطف را تعمیم دهید.

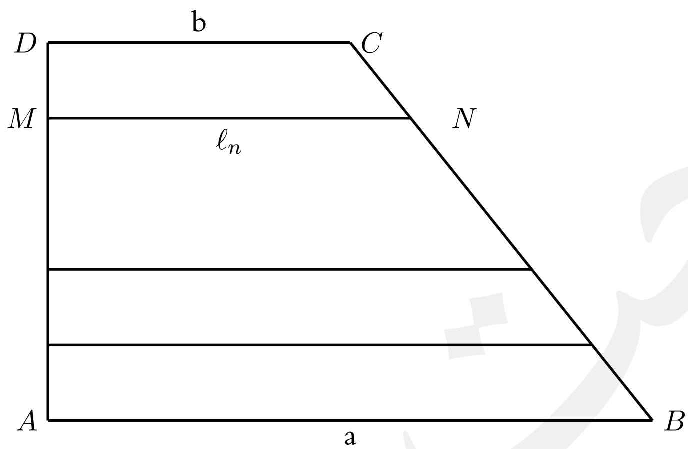
الف: $q \vee (p_۱ \wedge p_۲ \wedge ... \wedge p_n) \equiv (q \vee p_۱) \wedge (q \vee p_۲) \wedge ... \wedge (q \vee p_n)$

ب: $q \wedge (p_۱ \vee p_۲ \vee ... \vee p_n) \equiv (q \wedge p_۱) \vee (q \wedge p_۲) \vee ... \vee (q \wedge p_n)$

۴۲. در ذوزنقه‌ی $ABCD$ که قاعده‌ی بزرگ $|AB| = a$ و قاعده‌ی کوچک آن $|CD| = b$ است، ساق AD را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و از M آخرین نقطه‌ی تقسیم که به D نزدیک است خطی موازی با دو قاعده رسم می‌کنیم که ساق BC را در نقطه‌ی N قطع می‌کند. ثابت کنید اگر طول

MN را با ℓ_n نمایش دهیم، آنگاه

$$\ell_n = \frac{a+(n-1)b}{n}.$$



۴۳. با استفاده از استقرای قوی ریاضی ثابت کنید که زوایای داخلی هر n ضلعی منتظم $(n-2)\pi$ رادیان است.

۴۴. دنباله بازگشتی موسوم به لوکا به صورت زیر است. $a_1 = 1$ و $a_2 = 3$ و به ازای هر $n \geq 3$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. با اسقرای قوی ریاضی ثابت کنید که به ازای هر n $a_n \leq (\frac{7}{4})^n$.

فصل ۲

مجموعه‌ها

مقدمه

از سه دیدگاه وجود، معرفت شناسی(شناخت) و ماهیت شناسی می توان به هستی و مفاهیم و موضوعات و موجودات آن نگریست. با آثاری و نشانه‌هایی از هر موضوعی می توان به موجودیت آن پی برد و با کنکاش و تحقیقات بیشتر می توان معرفت و شناخت بیشتری به نسبت آن مفهوم، موضوع یا موجود پیدا کرد. اما در نگرش ماهیت شناسی به نسبت قریب به اتفاق آنچه در هستی است به بن‌بست برمی‌خوریم. هر آنچه را که قابل تعریف یا اثبات نیست که مستلزم احاطه‌ی آگاهی ما به آن است در بعد ماهیت شناسی عقیم خواهد ماند. مفاهیمی همچون خدا، روح، خصال انسانی همانند صداقت، سخاوت، شجاعت و ... وجود آنها در هیچ آزمایشگاه علوم تجربی قابل بررسی نیست اما می توان به وجود آن پی برد و شناخت نسبی کم یا زیاد به آن پیدا کرد. جمله ی قرآنی « قل الروح من امر ربی و ما اوتیتم من العلم الا قلیلا » را در نظر بگیرید که ال در العلم می تواند ، ال جنس باشد که مفهوم علم را در حالت کلی بیان کند، می تواند به علم به روح اشاره کند و یا حتی مفهوم ظریفتری داشته باشد که علم و آگاهی به درک این جمله « الروح من امر ربی » را قلیل بیان نماید که در هر صورت اعلان عدم توانایی بشر از ماهیت روح است. اگر چه بیش از ۲۰۰ ذره ی

بنیادی از اتم شناسایی شده است اما باز ماهیت ماده به طور کامل شناخته نشده است. مجموعه‌ها در ریاضی همچون بسیاری از مفاهیم دیگر از شاخه های ریاضی از این دسته هستند و ما فقط از جنبه ی وجود و معرفت شناسی به آن نظر خواهیم کرد و اگر برای مجموعه ،کلماتی همچون ، دسته، گروه، رده، گردایه و خانواده بکار برده شود، منظور تعریف نیست. از آنجا که مجموعه‌ها پایه و اساس تمام شاخه های ریاضی و بعضی از شاخه های علوم پایه و فنی و حتی علوم انسانی است، لذا نیاز به توسیع معرفت ما از مجموعه‌ها و اصول موضوعی نظریه‌ها، کاملا مشهود است. کانتور در دهه ی ۸۰ قرن ۱۹ نظریه‌ی طبیعی مجموعه‌ها را پایه‌ریزی کرد و آن را تا اواخر قرن ۱۹ در زمینه‌های اعداد اصلی، اعداد ترتیبی و اعداد ترامتناهی گسترش داد. اما در همان سال‌ها و اوایل قرن ۲۰ ، دانشمندانی همچون راسل، بورالی ــ فورتی و حتی خود کانتور به تعارض و پارادوکس‌هایی دست یافتند که باعث شد دانشمندانی همچون زرملو، فرانکل، ... با نگاهی دقیق‌تر و با اصول موضوعی، نظریه مجموعه‌ها را پایه‌ریزی کنند که ویژگی‌های اصلی مجموعه‌ها را حفظ کند و اساس و پایه‌های شاخه‌های ریاضیات را محکم کند و هیچ ناسازگاری بوجود نیاید.

۱.۲ مجموعه و اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها

برای شناخت بیشتری به مجموعه‌ها از خصوصیات آن صحبت می کنیم.

(۱) دسته‌ای از اشیاء مشخص و معلوم است ــ شیئ یک مفهوم عام است و منحصر به ماده نیست ــ بدین معنی است که صریح بتوان گفت که شیئ عضو آن است یا خیر.

(۲) اعضای آن دو به دو متمایز هستند. لذا دارای اعضای تکراری نیست. به عنوان مثال دو عدد ۳ در مجموعه ، همانند دو توپ سفید متمایز در یک کیسه هستند و یکی نیستند.

(۳) دارای خاصیت جابجایی است یعنی ترتیب نوشتن در آن هیچ اثری ندارد.

اما بعدا متوجه خواهیم شد که هر رده‌ای که دارای این خصوصیات هم باشد، مجموعه نیست. این گزاره‌ی شرطی دو طرفه نیست. مثلا رده‌ی همه‌ی مجموعه‌ها، رده‌ی فضاهای توپولوژی، رده‌ی فضاهای متریک، رده‌ی فضاهای برداری، گروه‌ها و یا رده‌ی توابع بین مجموعه‌ها، رده‌ی توابع پیوسته بین فضاهای توپولوژیک و بسیاری از این نمونه‌ها می‌توان یافت که دارای خصوصیات فوق هستند اما مجموعه نیستند. علائم مجموعه‌هایی همچون $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ به ترتیب برای مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا، حقیقی، و مختلط در دنیا ثابت و تعریف شده‌اند.

تذکر ۲.۱.۱. اگر اعضای یک دسته، دو به دو متمایز نباشند، آنگاه از کلمه‌ی خانواده به جای مجموعه استفاده می‌کنیم.

یک مجموعه می‌تواند، شامل تنها یک عضو باشد، یا هیچ عضویی نباشد. می تواند متناهی یا نامتناهی (ترامتناهی) باشد که آنها را بعدا تشریح خواهیم کرد. به صورت طبیعی مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی $A, B, C, \dots$ و اگر تعداد آنها زیاد باشد، به صورت اندیس دار $A_۱, A_۲, A_۳, \dots$ ، یا در حالت کلی A_i . اعضای آنها را با حروف کوچک انگلیسی نمایش می‌دهیم. مثلا اگر x عضویی از مجموعه‌ی A باشد گوییم x متعلق است به A یا x عضو A است و می‌نویسیم $x \in A$. اگر x عضویی از A نباشد می‌نویسیم $x \notin A$.

بدیهی است که هیچ مجموعه‌ای عضویی از خودش نیست. [۱]

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, \dots\}، \qquad \mathbb{W} = \{۰, ۱, ۲, ۳, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}، \qquad \mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq ۰\}$$

[۱] در بعضی مراجع چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های متعارف می‌نامند و موضوع مورد بحث ما نیز مجموعه‌های متعارف است.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را مجموعه‌ی تهی گوییم و آن را با حرف دانمارکی ϕ نمایش می‌دهیم. $\phi = \{\}$ بدانید که حرف یونانی φ نیست. در اصول موضوعی نظریه مجموعه‌ها از نظر زرملو این مفهوم به عنوان اصل موضوع مجموعه‌ی تهی بیان شده است که مجموعه‌ای وجود دارد که دارای هیچ عضویی نیست. مجموعه‌ای که k عضو دارد را یک مجموعه‌ی $k-$ عضویی می‌نامیم.

مثال ۲.۱.۱. الف : مجموعه‌ی حروف کوچک الفبای انگلیسی

$$A = \{a, b, c, d, ..., z\}$$

ب : مجموعه‌ی سیارات منظومه‌ی شمسی

{ نپتون، اورانوس، زحل، مشتری، مریخ، زمین، زهره، عطارد }

پ : مجموعه‌ی دانشجویان دانشگاه که در ترم جاری درس مبانی علوم ریاضی گرفته‌اند.

هر فرد در اطراف خود و در ذهن خود نمونه‌های خیلی زیادی از مجموعه‌ها را می‌شناسد.

اصل شمول و تساوی

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند گوییم A زیر مجموعه‌ی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ هر گاه هر عضو A در B باشد بعبارتی دیگر

$$A \subseteq B \equiv \forall x \quad x \in A \Longrightarrow x \in B$$

بعضی مواقع در مورد مجموعه‌ی B مطالبی بیان می‌کنیم که A زیر مجموعه‌ی آن است. گوییم B ابر مجموعه‌ی A است یا B حاوی A است یا B شامل A است.

گوییم مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی B مساوی است و می‌نویسیم $A = B$ هر گاه هر کدام زیر مجموعه‌ی دیگری باشد. به عبارت دیگر

$$A = B \equiv \forall x \quad x \in A \Longleftrightarrow x \in B \ .$$

اگر $A \subseteq B$ و $A \neq B$ ، آنگاه گوییم A یک زیر مجموعه‌ی محض یا سره‌ی B است و می‌نویسیم $A \subset B$ یا $A \subsetneqq B$.

به وضوح :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

مجموعه مرجع یا جهانی

در مقدمه مثال‌هایی از دسته اشیاءی که خصوصیات مجموعه‌ها را دارند و مجموعه نیستند، آورده شد. اگر چه یک مجموعه‌ی مرجع که شامل تمام اعضا و تمام مجموعه‌ها باشد وجود ندارد، اما در نظر گرفتن یک مجموعه که شامل تمام اعضای مورد نظر ما باشد به عنوان یک مجموعه‌ی جهانی یا مجموعه‌ی مرجع، لازمه‌ی ادامه کار در نظریه‌ی مجموعه‌ها با دید اصول نظریه‌ی مجموعه‌ها و اعمال حاکم بر آن است. لذا در هر موضوعی تمام زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی ثابت را مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن مجموعه را مجموعه‌ی جهانی یا مرجع نامیده و معمولا آن را با U یا M نمایش می‌دهیم. اگر مجموعه‌ی جهانی یک مجموعه از قبل شناخته شده باشد، از همان علامت معمول آن مجموعه استفاده می‌کنیم. به وضوح $x \in U$ یک گزاره‌ی همیشه درست است.

اصل تصریح مجموعه :

با توجه به تعداد اعضای یک مجموعه، نمایش آن مجموعه متفاوت خواهد بود.

اگر تعداد اعضای یک مجموعه، کم و معدود باشد می‌توان فهرست کامل آن را نوشت.

به عنوان مثال اسامی اساتید گروه زمین شناسی دانشگاه کردستان را به راحتی در یک مجموعه می‌توان نوشت اما اسامی اساتید دانشکده علوم دانشگاه را خیر. در حالاتی که تعداد اعضای یک مجموعه بسیار زیاد و یا حتی نامتناهی است نوشتن آن ها سخت و یا غیر ممکن است.

اگر می‌توانیم مجموعه‌ی اعداد طبیعی، صحیح، اول و ... را به صورت ناقص بنویسیم، مجموعه‌ی اعداد حقیقی را حتی با این فهرست ناقص هم نمی‌توان نوشت. در بعضی حالات بدلیل عدم تاثیر جابجایی اعضاء روش نوشتاری ما در میزان شناخت ما به آن مجموعه، اثر بسزایی خواهد داشت. به عنوان مثال مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی، مجموعه‌ی اعداد مربع کامل، مجموعه‌ی اعداد اول و ... را اگر بهم بریزیم در شرط اول شناخت مجموعه اخلال وارد خواهد شد. مجموعه‌ی اعداد فرد را در نظر بگیرید. همین جمله شناخت کامل مجموعه‌ی موردنظر را بوجود می‌آورد تا اینکه تعدادی از آن را به صورت ناقص {۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ...} بنویسیم. حال اگر همین مجموعه را به صورت

{۱, ۳, ۹, ۲۷, ۵, ۲۵, ۱۲۵, ۷, ۴۹, ۳۴۳, ...}

و یا مجموعه‌ی اعداد اول را اگر به صورت نامنظم {۲, ۱۱, ۷, ۱۳, ۵, ۱۷, ۳, ...} بنویسیم، ما را در شناخت مجموعه سر درگم خواهد کرد.

بعضی مواقع اعضایی از یک مجموعه‌ی مشخص را که در یک گزاره‌نما صدق می‌کنند و یا در یک ویژگی به شرط یا شرایطی صدق می‌کنند، مجموعه‌ای جدید را بوجود می‌آورد. این مجموعه‌ی جدید را به صورت $A = \{x \in M \mid P(x)\}$ نمایش می‌دهیم که M مجموعه‌ی مشخص مرجع است و $P(x)$ همان گزاره‌نما، ویژگی یا شرایطی است که برای x در نظر گرفته شده است تا اعضای مجموعه‌ی A مشخص گردد و آن را به صورت زیر می‌خوانیم.

مجموعه‌ی x هایی از M که در شرط یا گزاره‌نمای $P(x)$ صدق می‌کند. در نظریه‌ی اصل موضوعی

مجموعه‌ها این شیوه‌ی بیان را اصل موضوع تصریح مجموعه‌ها می نامند.

مثال :

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid ۲x^۲ - ۵x + ۲ = ۰\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid cosx = ۱\}$

می دانید که $D = \{۲\}$ و اگر مجموعه‌ی مرجع به جای $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q}$، یا $\mathbb{R}$ می بود $D = \{\frac{۱}{۲}, ۲\}$ و در E اگر $\mathbb{Z}$ به جای $\mathbb{R}$ ، مجموعه مرجع بود در این صورت $E = \{۰\}$ در حالیکه E یک مجموعه‌ی نامتناهی است.

مثال ۲.۱.۲. مجموعه‌ی اعداد صحیح بزرگتر از ۲ $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > ۲\}$

مثال ۳.۱.۲. بازه های اعداد حقیقی به طور معمول در ریاضیات به صورت زیر نمادگذاری می‌شود.

$J = (۰, ۱) = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۱\}$

$I = [۰, ۱] = \{x \in \mathbb{R} \mid ۰ \leq x \leq ۱\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

مثال ۴.۱.۲. مجموعه ی نقاط صفحه که روی نیم ساز ربع اول و سوم قرار دارند.

$\triangle = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, y = x\}$

اصل اجتماع و اشتراک و تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در اینصورت اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با نماد $A \cup B$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ و یا به عبارت دیگر

$$x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B.$$

که این تعریف به عنوان اصل موضوع اجتماع یاد شده است.

همچنین اشتراک دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cap B$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ و یا به عبارت دیگر

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B.$$

تفاضل دو مجموعه‌ی A از B را با $A \setminus B$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$$x \in A \setminus B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin B.$$

تفاضل $A \setminus B$ را متمم B نسبت A نیز می نامند. لذا

.$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

۲.۲ اعمال مجموعه‌ها

در این بخش به بعضی از خصوصیات اعمال مجموعه‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. : فرض کنید A و B و C زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی X باشد در این صورت خواص زیر برقرارند :

الف : **خاصیت جابجایی**

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

ب : **خاصیت شرکت پذیری**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

ج : **خاصیت خود توانی**

$$A \cap A = A ، A \cup A = A$$

د : **عضو خنثی**

$$A \cup \phi = A ، A \cap X = A$$

$$A \cap \phi = \phi ، A \cup X = X$$

$$A \setminus \phi = A ، A \setminus A = \phi$$

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

اگر U یک مجموعه‌ی جهانی و A زیر مجموعه ای از آن باشد آنگاه $U \setminus A$ را متمم A نامیده و آن را با A^c یا A° ، A' ، $\bar{A}$ نمایش می دهند. البته در کتاب های آنالیز A° را برای مجموعه‌ی

نقاط درونی A، A' را برای مجموعه‌ی نقاط حدی A و $\bar{A}$ را برای مجموعه بستار A بکار می برند لذا پسندیده آنست که از A^c استفاده کنیم.

قضیه ۲.۲.۲. برای هر دو مجموعه A و B، $A \setminus B = A \cap B^c$.

برهان. $x \in A \setminus B \equiv x \in A \land x \notin B \equiv x \in A \land (x \in U \setminus B) \equiv$
$x \in A \land (x \in B^c) \equiv x \in A \cap B^c$ □

مثال ۱.۲.۲. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

$$x \in A \setminus B \equiv x \in A \land x \notin B \equiv x \in A \land x \notin (A \cap B) \equiv x \in A \setminus (A \cap B)$$

بنابه قضیه فوق مثالهای زیر به سادگی اثبات می‌شود.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید U یک مجموعه‌ی جهانی و A زیرمجموعه ای از آن باشد. در این صورت :

۱) $A \cap A^c = \phi$ ۲) $A \cup A^c = U$ ۳) $(A^c)^c = A$

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید U یک مجموعه‌ی جهانی باشد در این صورت :

۱) $\phi^c = U$ ۲) $U^c = \phi$

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید A و B دو زیر مجموعه‌ی U باشند. در این صورت :

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

برهان. بنابه تعریف شمول:

$$A \subseteq B \equiv x \in A \longrightarrow x \in B \equiv$$

$x \notin B \longrightarrow x \notin A \equiv x \in B^c \longrightarrow x \in A^c \equiv B^c \subseteq A^c$ بنابه قانون عکس نقیض

□

قضیه ۴.۲.۲. (قوانین دمورگان مجموعه‌ها) دو مجموعه‌ی A و B مفروضند. در این صورت:

الف : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

ب : $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

برهان. قسمت ب را ثابت می‌کنیم و الف را به خواننده واگذار می‌کنیم.

$$x \in (A \cap B)^c \equiv x \notin A \cap B \equiv \sim (x \in A \cap B) \equiv \sim (x \in A \wedge x \in B) \equiv$$

$$\sim (x \in A) \vee \sim (x \in B) \equiv x \notin A \vee x \notin B \equiv x \in A^c \vee x \in B^c \equiv$$

$$x \in (A^c \cup B^c)$$

□

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید A و B و C سه مجموعه‌ی دلخواه باشند. در این صورت :

الف : خاصیت پخشی اجتماع نسبت به اشتراک: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ب : خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ج : خاصیت پخشی اشتراک نسبت به تفاضل: $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

برهان. قسمتهای الف و ج را اثبات می‌کنیم و ب را به خواننده واگذار می‌کنیم. الف :

$x \in A \cup (B \cap C) \equiv x \in A \vee x \in B \cap C$ تعریف اجتماع

$x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \equiv$ تعریف اشتراک

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \equiv$ خاصیت پخشی در گزاره ها

$(x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \equiv$ تعریف اجتماع

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \equiv$ تعریف اشتراک

ج :

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)^c =$$

$= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)$ قانون دمرگان

$= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c)$ خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع

$= \phi \cup (A \cap (B \cap C^c))$ مثال و خاصیت شرکتپذیری

$A \cap (B \setminus C)$ $\square$

تعریف ۱.۲.۲. تفاضل متقارن : فرض کنید A و B دو زیر مجموعه‌ی X باشندو تفاضل متقارن A و B را با $A \triangle B$ نمایش داده و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

برای تفاضل متقارن از نماد $\oplus$ نیز استفاده می شود، اما از آنجا که در کتابهای جبر و آنالیز از این نماد برای جمع مستقیم استفاده می شود، ما از آن استفاده نمی کنیم.

مثال ۴.۲.۲. به ازای هر دو مجموعه‌ی دلخواه A و B د داریم:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c)$$

$$= [(A \cup B) \cap (B^c \cup B)] \cap [(A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)]$$

$$= (A \cup B) \cap X \cap X \cap (A^c \cup B^c)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

قضیه ۶.۲.۲. عمل $\triangle$ دارای خواص زیر است :

الف: خاصیت جابجایی: $A \triangle B = B \triangle A$

ب: خاصیت شرکت پذیری: $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

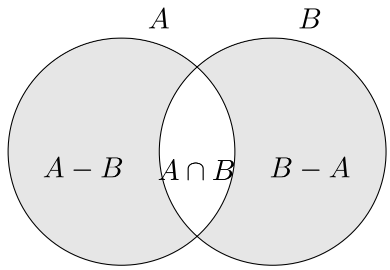
ج: عضو خنثی: $A \triangle \phi = \phi \triangle A = A$

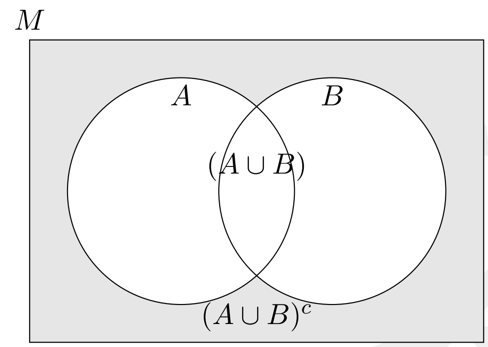
د: خاصیت پخشی اشتراک نسبت به تفاضل متقارن: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

برهان. اثبات به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

برای شناخت بیشتر و درک بهتر از اعمال روی مجموعه‌ها، از درک شهودی روش ترسیمی استفاده می کنیم. برای این منظور از نمودارهایی موسوم به نمودار ون بهره می بریم.

یک ناحیه همانند یک مستطیل (یا شکل دیگر) را به عنوان مجموعه‌ی مرجع یا جهانی M و قسمت هایی از این مستطیل (یا دایره هایی در داخل آن) را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از M در نظر می گیریم. در بعضی حالات که نیاز به مجموعه‌ی مرجع نیست از روش ترسیمی دو یا چند ناحیه در صفحه به عنوان مجموعه‌های مفروض استفاده می کنیم.





اصل موضوع زوج سازی و اصل موضوع مجموعه‌ی توانی

در اصول موضوع نظریه ی مجموعه‌ها، اصل موضوع زوج سازی بیانگر آن است که اگر A و B دو مجموعه باشند، انگاه مجموعه ای وجود دارد که شامل دو مجموعه‌ی A و B است . به بیانی دیگر $\{A, B\}$ یک مجموعه است لذا می توان مجموعه‌هایی شامل تعدادی مجموعه ساخت.

هر مجموعه‌ی غیرتهی حداقل دو زیرمجموعه‌ی تهی و خود آن مجموعه دارد که زیرمجموعه‌های بدیهی آن مجموعه نامیده می شود.

حال اگر تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را به عنوان اعضای یک مجموعه در نظر بگیریم، یک مجموعه‌ی جدید تشکیل می دهد.

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه باشد. مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های X را با $P(X)$ نمایش داده و آن را مجموعه‌ی توانی X می نامیم. در نظریه اصل موضوعی مجموعه‌ها، این موضوع به عنوان یک اصل به نام اصل موضوع مجموعه‌ی توانی در نظر گرفته می شود.

حال اگر از اصل تصریح مجموعه‌ها استفاده کنیم؛

$$P(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

یعنی متناظر با هر مجموعه، X ، مجموعه ای وجود دارد که اعضای آن تمام زیرمجموعه‌های X است.

مثال ۵.۲.۲. بدیهی است که ϕ تنها یک زیرمجموعه‌ی بدیهی ϕ دارد لذا $P(\phi)=\{\phi\}$.

مثال ۶.۲.۲. فرض کنید $X=\{۱\}$ آنگاه $P(X)=\{\phi, X\}$

مثال ۷.۲.۲. اگر $X=\{۱,۲\}$ آنگاه $P(X)=\{\phi,\{۱\},\{۲\},X\}$

مثال ۸.۲.۲. بنابه مثال فوق

$$P(P(\phi))=\{\phi,\{\phi\}\}$$

لذا

$$P(P(P(\phi)))=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$$

قضیه ۷.۲.۲. اگر X یک مجموعه‌ی $n-$ عضویی باشد، آنگاه $P(X)$ یک مجموعه‌ی ۲^n عضویی خواهد بود.

برهان. فرض کنید A یک زیرمجموعه‌ی X باشد. تمام حالات ممکن برای اینکه $x\in X$ یک عضو A باشد دو حالت است لذا برای هر عضو دو حالت و در نتیجه برای n عضو X ، ۲^n حالت ممکن است. بنابراین ۲^n حالت برای مجموعه‌ی A ممکن است و یعنی X، ۲^n زیرمجموعه دارد یعنی $P(X)$ ، ۲^n عضو دارد. بدیهی است که اگر $Y\subseteq P(X)$ ، انگاه Y شامل تعدادی از زیرمجموعه‌های X است. $\square$

۳.۲ اندیس گذاری و تعمیم اعمال مجموعه‌ها

از اصل موضوع مجموعه‌های توانی دریافتیم که مجموعه‌های بیشماری می توان یافت که اعضای آن مجموعه باشند. لذا برای اعمال مجموعه‌ها بر تعدادی یا همه ی اعضای یک مجموعه از مجموعه‌ها، باید اعضای آن را اندیس گذاری کنیم.

مثال ۱.۳.۲. مجموعه‌های A_1،A_2 ، A_3 ، ... را درنظر بگیرید که به ازای هر $n \in N$،

$$A_n = (-n, n) = \{x \in \mathbb{R} \mid -n < x < n\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \mid x \mid < n\}$$

مثال ۲.۳.۲. مجموعه‌های B_1 ، B_2 ، B_3 ، ... را درنظر بگیرید که به ازای هر $n \in N$،

$$B_n = [\frac{1}{n}, n) = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{n} \leq x < n\}$$

مثال ۳.۳.۲. مجموعه‌های C_i را درنظر بگیرید که $i > 0$ و به ازای هر i،

$$C_i = [-i, i] = \{x \in \mathbb{R} \mid \mid x \mid \leq i\}.$$

نکته ی قابل توجه دیگر آنست که در اجتماع یا اشتراک مجموعه‌ها، نیاز نیست که آن مجموعه ها، دو به دو متمایز باشند، لذا اگر بعضی از اعضای آن دسته از مجموعه‌ها، با هم برابر باشند، همچنان که قبلا اشاره شده است از کلمه ی خانواده استفاده می کنیم.

حال اگر I یک مجموعه باشد و به ازای هر $i \in I$ یک مجموعه‌ی A_i متناظر باشد، آنگاه خانواده ی همه ی مجموعه‌های A_i را با نمادهایی از جمله $\{A_i\}_{i \in I}$ ، $\{A_i \mid i \in I\}$ نمایش داده و آن را خانواده مجموعه‌های اندیس دار A_i می گوییم. در حالاتی که مجموعه اندیس متناهی باشد، خانواده ی مجموعه‌ی اندیس داری مانند $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ را به صورت $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ نیز نمایش می

دهند یا اگر مجموعه‌ی اندیس، همانند N باشد، خانواده ی $\{A_۱, A_۲, A_۳, ...\}$ را با $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ یا $\{A_n\}_{n=۱}^{\infty}$ نیز نمایش می دهند. در بعضی حالات خانواده ی مجموعه را نیز با حروفی مانند A ، B ، C یا علائم دیگر نمایش می دهند.

مثال ۴.۳.۲. در مثال های فوق

$$\{A_n\}_{n=۱}^{\infty} = \{A_n\}_{n\in N} = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{C_i\}_{i>\circ} = \{C_i | i \in Ri > \circ\} = \{[-i, i] | i > \circ\}$$

در صورتی که U یک مجموعه‌ی جهانی یا مرجع و $A = \{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیرمجوعه های U باشد، به صورت فنی نه دقیق $A \subseteq P(U)$ و می توان اجتماع و اشتراک خانواده ی اندیس دار A را تعریف کنیم. از علائم مجموعه‌ها، همچنون $\in, \subseteq, \subsetneqq, \cap, \cup$ برای خانواده مجموعه‌های اندیس دار نیز استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید A خانواده ای از زیر مجموعه‌های از U در نظر می گیریم که شامل تمام اعضای مجموعه‌های متعلق به خانواده ی A است. این اجتماع را با نماد $\cup_{A\in A} A$ یا $\cup A$ نمایش می دهیم. اگر $A = \{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ی مجموعه‌های اندیس دار باشد، آنگاه اجتماع را به صورت $\cup_{i\in I} A_i$ نیز نمایش داده می شود.

$$\cup_{i\in I} A_i = \{x \in U \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

اگر مجموعه‌ی اندیس $I = \{۱, ۲, ..., n\}$ باشد، آنگاه $\cup A_i$ را نیز به صورت $\cup_{i=۱}^{n} A_i$ و اگر $I = \mathbb{N}$ ، آنگاه $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ به صورت $\cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ نیز نمایش داده می شود.

مثال ۵.۳.۲. فرض کنید $A_n = \{-n, \circ, n\}$. در این صورت:

$\cup_{n=1}^{100} A_n = \{-100, -99, ..., -1, 0, 1, 2, ..., 100\}$

مثال ۶.۳.۲. فرض کنید $B_n = (n, n+1)$. در این صورت:

$\cup_{n\in\mathbb{Z}} B_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید $\mathcal{A}$ خانواده ای از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی مرجع U باشد، در این صورت اشتراک خانواده ی $\mathcal{A}$ را با $\cap\mathcal{A}$ یا $\cap_{A\in\mathcal{A}} A$ نمایش داده و تعریف می کنیم اشتراک خانواده‌ی A زیرمجموعه‌ای از U است که هر عضو آن در تمام اعضای A باشد.

$$\cap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in U \mid \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

حال اگر $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ی اندیس داری باشد، آنگاه اشتراک $\cap\mathcal{A}$ را به صورت $\cap_{i\in I} A_{i\in I}$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم اشتراک خانواده‌ی $\mathcal{A}$ زیرمجموعه‌ای از U است که هر عضو آن در تمام اعضای $\mathcal{A}$ باشد.

$$\cap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in U \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

همانند اجتماع ، اگر مجموعه‌ی اندیس متناهی $I = \{1, 2, ..., n\}$ باشد، آنگاه $\cap_{i\in I} A_i$ را به صورت $\cap_{i=1}^{n} A_i$ که $\cap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ و اگر $I = \mathbb{N}$ انگاه اشتراک آنها را به صورت $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ می‌نویسیم.

مثال ۷.۳.۲. اگر $A_n = [1/n, n]$ ، آنگاه $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$

مثال ۸.۳.۲. اگر $B_n = [-1/n, 2n)$، آنگاه $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n = [0, 2)$

قضیه ۱.۳.۲. **(تعمیم قوانین دمورگان)** فرض کنید U یک مجموعه‌ی جهانی یا مرجع و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیرمجموعه‌های U باشد، در این صورت :

الف : $(\cup_{i\in I}A_i)^c = \cap_{i\in I}A_i^c$

ب : $(\cap_{i\in I}A_i)^c = \cup_{i\in I}A_i^c$

برهان. قسمت الف را ثابت می‌کنیم و ب را به خواننده واگذار می‌کنیم.

$$x \in (\cup_{i\in I}A_i)^c \equiv x \notin (\cup_{i\in I}A_i) \equiv\sim (x \in (\cup_{i\in I}A_i))$$

$$\equiv\sim (\exists i \in I, s.t. x \in A_i) \equiv \forall i \in I, x \notin A_i$$

$$\equiv \forall i \in I, x \in {A_i}^c \equiv x \in \cap_{i\in I}A_i^c$$

□

قضیه ۲.۳.۲. (تعمیم قوانین توزیع پذیری یا پخشی) فرض کنید U یک مجموعه‌ی مرجع و $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه‌های U و B زیرمجموعه ای از U باشد. در این صورت

الف : $B \cup (\cap_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}(B \cup A_i)$

ب : $B \cap (\cup_{i\in I}A_i) = \cup_{i\in I}(B \cap A_i)$

برهان. با عضوگیری به سادگی بدست می‌آیند. □

در مطالب و قضایای فوق، هیچ اشاره ای به اینکه مجموعه‌ی اندیس چه مجموعه ایی است، مجموعه ای بزرگ است یا کوچک، مجموعه ای نامتناهی ناشمارای خیلی بزرگ است یا مجموعه‌ی تهی؟ نشده است.

حال می‌خواهیم با در نظر گرفتن مجموعه‌ی تهی به عنوان مجموعه‌ی اندیس، به دو نتیجه‌ی زیبا و غیر معمول و متناقض با درک شهودی ما از مفهوم اجتماع و اشتراک برسیم. همچنانکه می دانید به

صورت طبیعی اجتماع خانواده ای از مجموعه‌ها، بزرگتر و شامل اشتراک آن خانواده می‌باشد. اما در مجموعه‌ی اندیس تهی نتیجه کاملا متفاوت است.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید U یک مجموعه‌ی مربع و $\{A_i\}_{i\in\phi}$ خانواده‌ای تهی اززیرمجموعه‌های U می‌باشد. در این صورت

الف: $\cap_{i\in\phi} A_i = U$

ب: $\cup_{i\in\phi} A_i = \phi$

برهان. الف :

$x \in \cap_{i\in\phi} \iff \forall i \in \phi, \quad x \in A_i$ تعریف اشتراک

$\iff i \in \phi \longrightarrow x \in A_i$ تعریف سور عمومی

$\equiv T$ بنابه انتفاء مقدم در گزاره‌ی شرطی

پس هر عضو مجموعه‌ی مرجع در $\cap_{i\in\phi} A_i$ است. لذا $\cap_{i\in\phi} A_i = U$.

ب:

$$(\cup_{i\in\phi A_i})^c = \cap_{i\in\phi} A_i^c = U \Longrightarrow \cup_{i\in\phi} A_i = \phi$$

$\square$

نکته‌ی قابل تامل دیگر آن است که، آیا هر خانواده‌ای از مجموعه‌ها را می‌توان به صورت یک مجموعه در نظر گرفت، ولو اعضای آن خانواده دوبه‌دو متمایز باشند؟ در بحث مقدمه، مثالهایی البته بدون اثبات آورده شده است که نشان می‌دهد که جواب سوال فوق منفی است. حال به یکی از آن‌ها

می‌پردازیم که مجموعه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد.

برتراند راسل با ارائه‌ی یک پاردوکس ((که اگر مجموعه‌ی مجموعه‌ها، وجود داشته باشد، آنگاه گزاره‌ای هم درست و هم غلط است)) به انتفای وجود مجموعه‌ی مجموعه‌ها و یا به تعبیری عام و قویتر مجموعه‌ی جهانی مطلق رسید.

قضیه ۴.۳.۲. **(پارادوکس راسل)** فرض کنید U مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌ها وجود داشته باشد، در این صورت اگر $R \subseteq U$ با $R = \{X \in U \mid X \notin X\}$ ، آنگاه

الف : $R \notin R$ ب: $R \in R$

برهان. اگر $R \notin R$ آنگاه R عضوی از U نیست که متعلق به خودش نباشد پس به خودش متعلق است لذا $R \in R$

اگر $R \in R$ ، آنگاه R عضوی از U است که متعلق به خودش نیست لذا $R \notin R$.

از اثبات فوق می‌توان فهمید که هم $R \in R$ و هم $R \notin R$ و می‌دانیم که اگر P یک گزاره باشد، آنگاه ترکیب عطفی $P \wedge \sim P$ همیشه نادرست است. یعنی اگر مجموعه‌ی مجموعه‌ها وجود داشته باشد، انگاه همیشه به یک نتیجه نادرست می‌رسیم.

به بیانی دیگر $R \notin R \iff R \in R$ و این یعنی $P \equiv \sim P$ که غیرممکن است. بنابراین مجموعه‌ی مجموعه‌ها وجود ندارد. به طریقی مشابه می‌توان مثال‌های دیگر زیادی پیدا کرد که مجموعه نیستند. □

با توجه به مطالب فوق متذکر می‌شویم که مجموعه‌های مورد بحث ما در مبانی علوم ریاضی مجموعه‌هایی هستند که نمی‌توانند عضو خودشان باشند به چنین مجموعه‌هایی، مجموعه‌ی متعارف

می‌گویند. لازم به ذکر است که در مفاهیم انسانی یا انتزاعی چنین مجموعه‌هایی را می‌توان تعریف کرد. آیا می‌توانید مجموعه‌ای بیابید که نه متعارف باشد و نه نامتعارف ؟

۴.۲ ضرب و هم‌ضرب

یکی از جنبه‌های رشد علم و آگاهی بشر در طول تاریخ، تعمیم مفاهیم و موضوع‌های بسیط و آسان است. به عنوان مثال در موضوع اعداد، ابتدا اعدادطبیعی به اعداد حسابی و از آن به اعداد صحیح سپس به اعداد گویا و در نهایت به اعداد حقیقی و با تعریف اعداد موهومی به اعداد مختلط تعمیم یافته است و در طول شناخت این اعداد، دو تایی مرتب چنان تعریف شده است که به عنوان مثال تعمیم اعداد طبیعی را به اعداد صحیح و تعمیم اعداد صحیح را به اعداد گویا، قانون مند سازند و با تعریف خاصیت کوچکترین کران بالایی اعداد گویا را به اعداد حقیقی تعمیم دهند.

زوج مرتب (جفت مرتب یا دوتایی مرتب)

زوج مرتب برای نشان دادن نقطه، یک بردار در صفحه‌ی مختصات و حتی یک ماتریس ۲ × ۱ ، در مبانی جبرخطی و ریاضی‌عمومی بدون آنکه حتی به تعریف آن اشاره‌ای شود، بارها در دوره های تحصیلی متوسطه‌ی اول و دوم مورد استفاده قرار گرفته است و تنها به توصیف آن و کاربرد آن پرداخته شده است.

همچنانکه می‌دانید برای دو عضو $x \in X$ و $y \in Y$ ، زوج مرتب (x, y) را به عنوان مجموعه‌ی $\{x, y\}$ در نظر نمی‌گیریم، زیرا که در زوج مرتب x و y می‌توانند متمایز نباشند و ترتیب نوشتن آنها نیز مهم است مگر آنکه $x = y$. لذا به منظور برجسته کردن این خصوصیات، تعاریف متفاوتی در شاخه های مختلف ریاضی و در شیوه‌ی بیان نظریه‌ی اصول موضوعی مجموعه‌ها برای زوج مرتب داده شده

است. از جمله $\{\{a\},\{a,b\}\}$ و $\{\{b\},\{a,b\}\}$ از طرف کوراتوفسکی [۲]، $\{\{\{a\},\phi\},\{\{b\}\}\}$ از طرف نوربرت وینر [۳] ، $\{a,\{a,b\}\}$ در نظریه‌ی مجموعه‌ها در تنظیم اصل موضوعی زرملو [۴] و نظریه‌ی مجموعه‌ها از دیدگاه گروتندیک ــ تارسکی [۵] همچنین $\{\{a,1\},\{b,2\}\}$ از طرف فلیکس هاوسدورف [۶] برای زوج مرتب (a,b) تعریف شده است که همه‌ی آنها شرایط زوج مرتب را دارا هستند. این تعاریف با وجود پیچیدگی‌های خاص خود هر کدام در زمینه‌ای و برای اثبات قضایایی در سطح پیشرفته در نظریه‌ی مجموعه‌ها، به کار برده شده است. حتی اگر هیچ کدام از این تعاریف را ندانیم، با همان شناخت اولیه‌ای که از زوج مرتب داریم هیچ مشکلی در بکارگیری زوج مرتب نداریم. در زوج مرتب (a,b) ، a را مولفه‌ی اول و b را مولفه‌ی دوم می‌نامیم.

حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه‌ی X در Y را مجموعه‌ی تمام زوج مرتب هایی که مولفه‌ی اول آن عضوی از X ، و مولفه‌ی دوم عضوی از آن Y است تعریف می‌کنیم.

حال برای تعمیم زوج مرتب به یک n ــتایی مرتب و یا یک دنباله و یا I ــتایی مرتب که I یک مجموعه‌ی اندیس است و برای تعمیم حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه به چند مجموعه و یا بی نهایت مجموعه، نیاز به تعریف تابع داریم. لذا بدون در نظر گرفتن تابع به عنوان یک رابطه ــ که رابطه‌ای از A به B زیرمجموعه‌ای از حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ استــ همانطور که در بحث سورهای عمومی و وجودی و گزاره نماها اشاره شد، زوج مرتب را بعنوان یک تابع تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۲. گوییم f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ تابعی از A به B هر گاه به ازای هر $x\in A$ ، یک عضو یکتای $y\in B$ چنان موجود باشد که $y=f(x)$ و یا x را به y نسبت دهد.

---

[۲] Kazimierz
[۳] Wiener Norbert
[۴] Frankel ـ Zermelo
[۵] Grotendieck ـ Tarski
[۶] Felix ـ Hausdorff

$$\forall x \in A \quad \exists! y \in B \quad s.t. \quad y = f(x)$$

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه غیرتهی و $x \in X$ و $y \in Y$ باشد. زوج مرتب (x, y) تابعی مانند f از مجموعه‌ی $\{۱, ۲\}$ به مجموعه‌ی $X \cup Y$ است به طوریکه: $f(۱) = x \in X$ و $f(۲) = y \in Y$.

از تعریف به وضوح می‌توان ترتیب، عدم تمایز و مولفه‌های زوج مرتب را مشاهده نمود. حال حاصل‌ضرب دکارتی یا حاصل‌ضرب مستقیم و یا به طور ساده ضرب $X \times Y$ را مجموعه‌ی تمام توابعی مانند f از $\{۱, ۲\}$ به مجموعه‌ی $X \cup Y$ به طوریکه $f(۱) \in X$ و $f(۲) \in Y$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۴.۲. حاصل‌ضرب دکارتی X در Y را با $X \times Y$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم

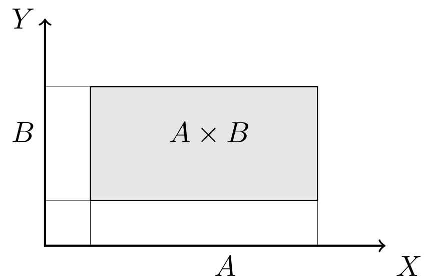
$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$$

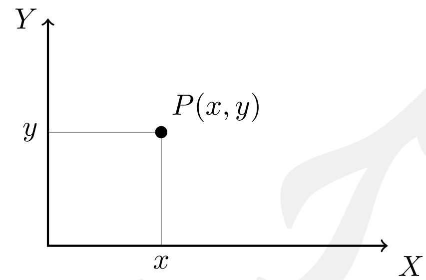
قضیه ۱.۴.۲. به ازای هر دو زوج مرتب $(a, b), (c, d)$:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c, b = c$$

برهان. فرض کنید زوج (a, b) تابع f باشد که $f(۱) = a, \quad f(۲) = b$ و زوج (c, d) تابع g باشد که $g(۱) = c, \quad g(۲) = d$ حال اگر $(a, b) = (c, d)$ ، آنگاه $f = g$ و لذا به ازای هر $i \in \{۱, ۲\}$ ، $f(i) = g(i)$ ، پس $f(۱) = g(۱)$ یعنی $a = c$ و $f(۲) = g(۲)$ یعنی $b = d$ عکس آن بدیهی است. $\square$

در صفحه‌ی مختصات، اگر X را محور طول و Y را محور عرض در نظر بگیریم، نمایش زوج مرتب (x,y) نقطه‌ای از صفحه خواهد بود و اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، آنگاه $A \times B \subseteq X \times Y$ قطعه‌ای از صفحه‌ی مختصات به صورت زیر می‌باشد.





بدیهی است که عمل ضرب، همانند عمل اجتماع، اشتراک یا تفاضل یا تفاضل متقارن نیست. مجموعه‌ی مرجع را تغییر می‌دهد و بعضی از خواص را ندارد. با یک مثال ساده می‌توان فهمید که حاصل‌ضرب دکارتی دارای خاصیت جابجایی نیست.

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید، $X = \{۱,۲\}$ ، $Y = \{a,b\}$ در این صورت:

$$X \times Y = \{(۱,a),(۲,a),(۱,b),(۲,b)\}$$

$$Y \times X = \{(a,۱),(a,۲),(b,۱),(b,۲)\}$$

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی دلخواه باشد. در این صورت

$$X \times Y = Y \times X \Longleftrightarrow X = Y$$

برهان. در صورت $X = Y$ بدیهی است که $X \times Y = X \times X = Y \times X$

عکس قضیه : اگر $X \times Y = Y \times X$ آنگاه هر زوج $(x,y) \in X \times Y$ در $Y \times X$ نیز است لذا $x \in Y$ ، $y \in X$ پس $X \subseteq Y$ و $Y \subseteq X$ یعنی $X = Y$. □

عمل ضرب دارای ویژگی‌های زیر است :

قضیه ۳.۴.۲. عمل ضرب نسبت به اجتماع، اشتراک و تفاضل دارای خاصیت توزیع پذیری است یعنی :

$$۱.(A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C, \quad A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$$

$$۲.(A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C, \quad A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$$

$$۳.(A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C, \quad A \times (B \setminus C) = A \times B \setminus A \times C$$

برهان. ۱ :

$$(x,y) \in A \times (B \cup C) \equiv x \in A \wedge y \in B \cup C \equiv$$

$$x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \equiv (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \equiv$$

$$(x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C \equiv (x,y) \in A \times B \cup A \times C$$

اثبات بقیه‌ی گزینه‌ها مشابه فوق و مستقیم است. □

حال می‌توان حاصل ضرب دکارتی سه مجموعه X در Y در Z را با نماد $X \times Y \times Z$ نمایش داده و به صورت تمام توابعی مانند f از $\{۱,۲,۳\}$ به اجتماع $X \cup Y \cup Z$ که $f(۱) \in X, f(۲) \in Y$ و $f(۳) \in Z$ تعریف کنیم لذا

$$X \times Y \times Z = \{(x,y,z) | x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z\}$$

و برای تعمیم آن به $n-$ تایی‌های مرتب مانند $(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ که $x_i \in X_i$ ، تابع را از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,n\}$ به $\cup_{i=۱}^{n} X_i$ که $f(i) = x_i \in X_i$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۴.۲. حاصل ضرب دکارتی یا ضرب مستقیم $X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n$ را که با نماد $\prod_{i=۱}^{n} X_i$ نیز نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\prod_{i=۱}^{n} X_i = X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n = \{(x_۱, x_۲, ..., x_n) | x_i \in X_i i = ۱, ۲, ..., n\}$$

اگر $X_i = X$ ، آنگاه حاصل‌ضرب $X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n$ را با X^n نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم.

$$X^n = \{(x_۱, x_۲, ..., x_n) | x_i \in X, \quad i = ۱, ۲, ..., n\}$$

شما در دوره‌ی تحصیلی قبل با صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ و فضای $\mathbb{R}^۳$ در هندسه‌ی تحلیلی آشنایی دارید. از دوران ابتدایی به صورت ساده و دوران متوسطه به صورت تخصصی بارها از دنباله‌ها تصاعدهای حسابی و هندسی استفاده کرده اید. حال با تعریف علمی و دقیق تری از دنباله‌ها آشنا شوید که، فرض کنید $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی و $x_n \in X_n$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$

تعریف ۵.۴.۲. دنباله‌ی $(x_۱, x_۲, ...,)$ یک تابع مانند f از $\mathbb{N}$ به $\cup_{n=۱}^{\infty} X_n$ است که به ازای هر $f(n) = x_n \in X_n, n \in \mathbb{N}$. به ازای هر n ، $f(n) = x_n$ را جمله‌ی n ـ ام دنباله می‌نامند. حال اگر $X_n = X$ به ازای هر n در این صورت دنباله‌ای $f = (x_۱, x_۲, ...)$ یک دنباله از مجموعه‌ی X نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۴.۲. حاصل‌ضرب دکارتی $X_۱ \times X_۲ \times ... = \prod_{n=۱}^{\infty} X_n$ مجموعه‌ی تمام دنباله‌های مانند $(x_۱, x_۲, x_۳, ...)$ می‌باشد که $x_n \in X_n$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$.

به صورت دقیق $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ مجموعه‌ی تمام توابع از $\mathbb{N}$ به $\cup_{n=۱}^{\infty}$ می‌باشد. اگر $X_n = X$ در این

صورت $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ را به X^ω نمایش می‌دهیم و می‌خواهیم « X به توان امگا » . در بعضی از کتابها از $X^{\mathbb{N}}$ نیز استفاده می‌شود.

برای تعمیم کامل حاصل‌ضرب مستقیم یا حاصل‌ضرب دکارتی از یک مجموعه‌ی متناهی یا شمارا به یک مجموعه اندیس دلخواه، نیز همانند فوق عمل می‌کنیم.

تعریف ۷.۴.۲. فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی باشد. در این صورت حاصل‌ضرب دکارتی $\prod_{i\in I} X_i$ را به صورت مجموعه‌ی تمام توابع از I به $\cup_{i\in I} X_i$ تعریف می‌کنیم. همانطور که یک n ـ تایی را به صورت $(x_1, x_2, ..., x_n)$ و یک دنباله را به صورت $(x_1, x_2, x_3, ...)$ می‌نویسیم یک عضو از $\prod_{i\in I} X_i$ را به صورت یک I ـ تایی مرتب با نماد $(x_i)_{i\in I}$ می‌نویسیم و می‌دانیم که هر $(x_i)_{i\in I}$ یک تابع مانند f از I به $\cup_{i\in I} X_i$ است که به ازای هر $i \in I$ ، $f(i) = x_i \in X_i$.

اگر $X_i = X$ ، آنگاه $\prod_{i\in I} X_i$ را با نماد X^I نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$X^I = \{f | f : I \longrightarrow X\}$$

البته این مفهوم حاصل‌ضرب و یا به طور ساده ضرب را بعد از موضوع تابع و ترکیب توابع، به صورت دقیق تر و با دیدگاه رسته‌ای تعریف می‌کنیم.

عمل دیگری که نیاز به تعریف دقیق‌تری دارد و ما اینجا توصیف ساده و قابل فهمی از آن ارائه می‌دهیم همان موضوع هم‌ضرب که به تعبیری دوگان ضرب است. به تناسب استفاده‌ی آن در جاهای مختلف کلمات مختلفی برای مفهوم هم‌ضرب همچون اجتماع مجزا، اجتماع مجزای کپی‌ها، جمع مستقیم و ... بکار برده می‌شود. مفهوم دوگان را در بحث توابع تشریح خواهیم کرد.

همچنانکه می‌دانیم یک تناظر یک به یک بین دو مجموعه‌ی X و $X \times \{1\}$ و دو مجموعه‌ی Y و $Y \times \{2\}$ تهی است. به وضوح می‌توان دید که اگر X و Y دو مجموعه‌ی متناهی باشند آنگاه اجتماع دو مجموعه‌ی جدا از هم $X \times \{1\} \cup Y \times \{2\}$ به تعداد دو مجموعه‌ی X و Y عضو دارد. البته این موضوع در حالت کلی هم قابل اثبات است که بعدا در موضوع توابع ثابت خواهد شد. لذا $X \times \{1\}$ کپی از X و $Y \times \{2\}$ کپی از Y می‌باشد و اجتماع مجزای کپی‌های X و Y خواهد بود. حال :

تعریف ۸.۴.۲. هم‌ضرب دو مجموعه‌ی X و Y را به صورت $X \coprod Y$ یا $(X \oplus Y, X \uplus Y)$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم: $X \coprod Y = X \times \{1\} \cup Y \times \{2\}$.

تذکر ۱.۴.۲. اگر X و Y دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند هم‌ضرب آنها همان اجتماع X و Y خواهد بود. موضوع هم‌ضرب در مباحث مجموعه‌های ترامتناهی و اعداد اصلی و جمع اعداد اصلی و اصول موضوع معادل اصل انتخاب بسیار کاربرد خواهد داشت و همین موضوع مستلزم بیان و تعمیم مفهوم هم‌ضرب شده است.

تعریف ۹.۴.۲. فرض کنید $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$ ، n مجموعه‌ی غیرتهی باشند. در این‌صورت هم‌ضرب آنها را با $X_1 \coprod X_2 \coprod ... \coprod X_n = \coprod_{i=1}^{n} X_n$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم. $\coprod_{i=1}^{n} X_i = \cup_{i=1}^{n} X_i \times \{i\} = X_1 \times \{1\} \cup X_2 \times \{2\} \cup ... \cup X_n \times \{n\}$

و به صورت کلی‌تر اگر $\{X_n\}_{n \in N}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی باشند. در این‌صورت $\coprod_{n=1}^{\infty} = \cup_{n=1}^{\infty} X_n \times \{n\}$ و در حالت تعمیم کامل اگر $\{X_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیرتهی باشند در این صورت $\coprod_{i \in I} X_i = \cup_{i \in I} X_i \times \{i\}$

قضیه ۴.۴.۲. اگر $X_n = X$ در این صورت $\coprod_{n=1}^{\infty} X_n = X \times \mathbb{N}$ و اگر $X_i = X$ ، آنگاه $\coprod_{i\in I} X_i = X \times I$.

برهان. اثبات به خواننده واگذار می‌شود. □

۵.۲ عمل دوتایی

در فصل قبل تابع را به صورت ترکیبی از سورهای عمومی و وجودی برای دومجموعه‌ی A و B تعریف کردیم. در این فصل نیز توضیحات گسترده‌ای از حاصلضرب دکارتی دومجموعه داشتیم. حال می‌خواهیم یک عمل دوتایی روی یک مجموعه را تعریف کنیم و آن را توسیع دهیم.

تعریف ۱.۵.۲. هر تابع f از $X \times X$ به X را یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی X می‌نامیم. هرگاه f یک عمل دوتایی باشد، گوییم X نسبت به عمل f بسته است.

به تناسب عمل دوتایی از علائم مختلفی استفاده می‌کنیم.

اگر عمل مشخص باشد، همان علامت را بکار می‌بریم، اما اگر نامشخص باشد معمولا از علائمی همچون $*$ ، $\circ$ یا $\bullet$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۲. ۱. عمل جمع روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی است. زیرا که مجموع هر دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است.

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$(m,n) \longmapsto m+n$$

۲. عمل جمع روی $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ نیز یک عمل دوتایی است.

۳. عمل ضرب نیز روی $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی است.

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto x.y$$

۴. عمل تفاضل روی $\mathbb{N}$ یک عمل دوتایی نیست زیرا که $۲ - ۵ = -۳$ در $\mathbb{N}$ نیست. اما عمل تفاضل روی $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی است.

۵. اگر X یک مجموعه باشد، آنگاه اعمال $\cap, \cup, \setminus, \triangle$ روی $P(X)$ عمل دوتایی هستند. به عبارتی $P(X)$ روی اعمال اشتراک، اجتماع، تفاضل و تفاضل متقارن بسته است.

$$\cap : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$

$$(A, B) \longmapsto A \cap B$$

$$\cup : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$

$$(A, B) \longmapsto A \cup B$$

$$\setminus : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$

$$(A, B) \longmapsto A \setminus B$$

$$\triangle : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$

$$(A, B) \longmapsto A \triangle B$$

۶. عمل تقسیم روی $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ یک عمل دوتایی نیست اما عمل تقسیم روی $\mathbb{Q} \setminus \{۰\}$ و $\mathbb{R} \setminus \{۰\}$ یک عمل دوتایی است.

تعریف ۲.۵.۲. هرگاه $*$ یک عمل دوتایی روی X باشد. گوییم X نسبت به عمل $*$ شرکتپذیر است هر گاه به ازای هر سه عضو $x, y, z \in X$ ، $x * (y * z) = (x * y) * z$

مثال ۲.۵.۲. مجموعه‌های $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ نسبت به دو عمل جمع و ضرب شرکتپذیر هستند.

$$\forall x, y, z \quad ۱) x + (y + z) = (x + y) + z, \quad ۲) x.(y.z) = (x.y).z$$

اما نسبت به عمل تفاضل شرکتپذیر نیستند.

۲.مجموعه‌های $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ و $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ نسبت به عمل تقسیم شرکتپذیر نیستند.

۳. $P(X)$ نسبت به عمل اجتماع، اشتراک و تفاضل متقارن شرکتپذیر است.

تعریف ۳.۵.۲. هرگاه X نسبت به عمل $*$ بسته و شرکتپذیر باشد، گوییم X نسبت به عمل $*$ یک نیم‌گروه است. و می‌نویسیم $(X,*)$ یک نیم‌گروه است.

مثال ۳.۵.۲. مجموعه‌های $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ نسبت به جمع و ضرب نیم‌گروه هستند.

مثال ۴.۵.۲. $P(X)$ نسبت به اعمال $\cap$ و $\cup$ و $\triangle$ نیم‌گروه است.

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنید $(X,*)$ یک نیم‌گروه باشد، اگر $e\in X$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x\in X$ ، $x*e=e*x=x$. گوییم l عضو خنثی عمل $*$ است.

اگر نیم‌گروه $(X,*)$ دارای عضو خنثی باشد، $(X,*)$ را یک مونوئید (یا تیلگون) می‌نامیم.

مثال ۵.۵.۲. ۱. صفر عضو خنثی عمل جمع در $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ است لذا $(\mathbb{Z},+)$، $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ مونوئید هستند. اما $(\mathbb{N},+)$ یک مونوئید نیست.

۲. یک عضو خنثی عمل ضرب در $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ است.

۳. X عضو خنثی عمل اشتراک است زیرا که

$A\cap X=A=X\cap A \quad \forall A\subseteq X$ پس $(P(X),\cap)$ یک مونوئید است.

ϕ عضو خنثی عمل اجتماع است زیرا که

$A\cup\phi=\phi\cup A=A \quad \forall A\subseteq X$ پس $(P(X),\cap)$ یک مونوئید است.

ϕ عضو خنثی عمل تفاضل متقارن است. زیرا که

$A\triangle\phi=\phi\triangle A=(A\setminus\phi)\cup(\phi\setminus A) \quad \forall\subseteq$ پس $(P(X),\triangle)$ یک مونوئید است.

قضیه ۲.۵.۱. عضو خنثی $(X, *)$ در صورت وجود یکتاست.

برهان. اثبات به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

تعریف ۲.۵.۵. فرض کنید $(X, *)$ یک مونوئید با عضو e باشد. گوییم $(X, *)$ یک گروه است هر گاه

$$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad s.t \quad x * y = y * x = e$$

، y را عضو قرینه (یا وارون) x می‌نامیم.

مثال ۲.۵.۶. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ گروه هستند.

مثال ۲.۵.۷. $(\mathbb{Q} \setminus \{\circ\}, \times)$ و $(\mathbb{R} \setminus \{\circ\}, \times)$ گروه هستند.

مثال ۲.۵.۸. $(P(X), \triangle)$ یک گروه است. اما $P(X)$ نسبت به اعمال اجتماع و اشتراک تشکیل گروه نمی‌دهد.

عضو قرینه‌ی هر $A \in P(X)$ ، خود A است زیرا که $A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \phi$

تعریف ۲.۵.۶. فرض کنید $*$ یک عمل دوتایی روی مجموعه‌ی X باشد. گوییم X نسبت به عمل $*$ دارای خاصیت جابجایی است هرگاه به ازای هر دو عضو $x, y \in X$ ، $x * y = y * x$

مثال ۲.۵.۹. $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ نسبت به دو عمل جمع و ضرب دارای خاصیت جابجایی هستند.

مثال ۲.۵.۱۰. $(P(X), \triangle)$ یک گروه جابجایی است.

تعریف ۲.۵.۷. فرض کنید دو عمل دوتایی $*$ و $\bullet$ روی مجموعه‌ی X تعریف شده باشد و خصوصیات زیر برقرار باشد.

الف : $(X,*)$ یک گروه جابجایی باشد.

ب : $(X,\bullet)$ یک نیم‌گروه باشد.

ج: عمل $\bullet$ نسبت به عمل $*$ دارای خاصیت پخشی باشد. یعنی:

$$\forall x,y,z\in X\ \ ۱)x\bullet(y*z)=(x\bullet y)*(x\bullet z),\ \ ۲)(y*z)\bullet x=(y\bullet x)*(z\bullet x)$$

گوییم X یک حلقه است و با نماد $(X,*,\bullet)$ نمایش می‌دهیم. حلقه‌ی $(X,*,\bullet)$ را یک حلقه‌ی یکدار گوییم هر گاه X نسبت به عمل $\bullet$ دارای عضو خنثی باشد.

مثال ۱۱.۵.۲. $(\mathbb{Z},+,\times),(\mathbb{Q},+,\times),(\mathbb{R},+,\times)$ ، نسبت به عمل جمع و ضرب اعداد حلقه جابجایی و یکدار تشکیل می‌دهند. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad x\times(y+z)=x\times y+x\times z$

مثال ۱۲.۵.۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. در این صورت $(P(X),\triangle,\cap)$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار تشکیل می‌دهد. با عضوگیری ثابت کنید که:

$$\forall A,B,C\in P(X)\quad A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$$

تمرین

۱. مجموعه‌های نمادگذاری شده را مشخص کنید.

الف : $\{x\in\mathbb{R}\mid [x]=۰\}$

ب : $\{x\in\mathbb{Z}\mid x^{۲}+۵x-۶\leqslant ۰\}$

ج : $\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leqslant ۲\}$

د : $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^{۳}-x=۰\}$

۲. مجموعه‌های زیر را نمادگذاری کنید.

الف : $\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\cdots\}$

ب : $\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\cdots\}$

ج : $\{۱,۲,۴,۸,\cdots\}$

د : $\{۱,۳,۶,۱۰,۱۵,\cdots\}$

۳. قضیه ۲.۲.۱ را ثابت کنید.

۴. ثابت کنید: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

۵. ثابت کنید: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

۶. قضیه ۲.۲.۶ را ثابت کنید. به عبارتی ثابت، عمل $\triangle$ دارای خاصیت جابجایی، شرکت‌پذیری، عضو خنثی و توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به تفاضل متقارن است.

۷. فرض کنید A و B دو مجموعه باشد. کدام یک از حالات زیر درست است. برای درستی و نادرستی خود دلیل بیاورید.

الف: $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

ب: $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

ج: ثابت کنید $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$ در هیچ شرایطی درست نیست.

۸. فرض کنید B یک زیرمجموعه‌ی A باشد و $P(A : B) = \{X \in P(A) \mid B \subseteq X\}$ و $P(A|B) = \{X \in P(A) \mid B \subsetneqq X\}$.

در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است.

الف: $P(A : B) = P(A) \setminus P(B)$

ب: $P(A \mid B) = P(A) \setminus P(B)$

۹. اگر A یک مجموعه‌ی n عنصری و B یک زیرمجموعه‌ی m عنصری از A باشد، آنگاه تعداد اعضای $P(A : B)$ و $P(A \mid B)$ چقدر است؟

۱۰. ثابت کنید $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $P(A) \subseteq P(B)$.

۱۱. ثابت کنید $A = B$ اگر و تنها اگر $A \cup B = A \cap B$.

۱۲. فرض کنید $A \subseteq C$ و $B \subseteq D$. ثابت کنید:

الف: $A \cap B \subseteq C \cap D$

ب: $A \cup B \subseteq C \cup D$

۱۳. با یک مثال نقض، ثابت کنید که سوال ۱۲ برای تفاضل درست نیست.

۱۴. با استفاده از استقرای ریاضی قوانین توزیع‌پذیری را تعمیم دهید.

فرض کنید A و $B_1, B_2, \cdots, B_n$ مجموعه باشند. در این صورت

الف: $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$

ب: $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = (A \cup B_1) \cap \cdots \cap (A \cup B_n)$

۱۵. با ستفاده از استقرای ریاضی قوانین دمورگان را تعمیم دهید.

فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_n$، n زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی مرجع U باشند. در این صورت:

الف: $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup \cdots \cup A_n^C$

ب: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C$

۱۶. فرض کنید A_1, A_2 و B سه مجموعه باشند. ثابت کنید:

الف: $(A_1 \cup A_2) \setminus B = (A_1 \setminus B) \cup (A_2 \setminus B)$

ب: $(A_1 \cap A_2) \setminus B = (A_1 \setminus B) \cap (A_2 \setminus B)$

۱۷. با استقرای ریاضی سوال ۱۶ را تعمیم دهید.

۱۸. قضیه ۲.۳.۲ را ثابت کنید.

۱۹. فرض کنید $A_n = (0, \frac{1}{n})$، $B_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ و $C_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ مجموعه‌های زیر را به دست آورید.

الف: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ب: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ج: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ د: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$

و: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus C_n)$ ه: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus A_n)$

۲۰. زیرمجموعه‌ی A از $\mathbb{R}$ را یک مجموعه‌ی باز می‌نامیم هرگاه A را بتوان به صورت اجتماعی از بازه‌های باز بنویسیم $\left(A = \bigcup_{i\in I} (a_i, b_i)\right)$. حال ثابت کنید:

الف: اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، یک مجموعه‌ی باز است.

ب: اشتراک هر دو مجموعه‌ی باز، باز است، اما چنین نیست که اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های باز، باز باشد.

۲۱. زیرمجموعه‌ی B از $\mathbb{R}$ را یک مجموعه‌ی بسته می‌نامیم هرگاه متمم آن در $\mathbb{R}$ باز باشد. ثابت کنید:

الف: اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است.

ب: اجتماع هر دو مجموعه‌ی بسته، بسته است، اما چنین نیست که اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته باشد.

۲۲. ثابت کنید:

الف: اعداد گویا و اعداد گنگ نه باز هستند نه بسته.

ب: $\mathbb{R}$ و تهی هم باز هستند هم بسته هستند.

ج: اعداد طبیعی و اعداد صحیح بسته هستند اما باز نیستند.

۲۳. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ اشتراک تمام مجموعه‌های بسته‌ی شامل A را بستار A می‌نامیم و با $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم. و اجتماع تمام زیرمجموعه‌های باز مشمول در A را درون A می‌نامیم و با A° نمایش

می‌دهیم. بستار و درون اعداد گویا و اعداد گنگ را به دست آورید.

۲۴. خاصیت توزیع‌پذیری اشتراک و تفاضل و تفاضل متقارن را نسبت به ضرب ثابت کنید. یعنی:

الف: $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

ب: $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

ج: $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

۲۵. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای اندیس‌دار از مجموعه‌ها و B مجموعه باشند. ثابت کنید:

الف: $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i\in I} (A_i \times B)$

ب: $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i\in I} (A_i \times B)$

۲۶. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$ دو خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌ها باشند. ثابت کنید:

الف: $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$

ب: $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$

۲۷. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. درستی و یا نادرستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)$$

۲۸. ثابت کنید $(P(X), \triangle, \cap)$ یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار است.

فصل ۳

رابطه و ترتیب

مقدمه

هر روز شاهد روابطی در بین مواد، انسانها، حیوانات، شهرها، کشورها، در بین انسان و حیوان، انسان و محیط و روابطی دیگر هستیم. به عنوان مثال رابطه‌ی پدر فرزندی، برداری، رابطه‌ی هم‌کاری، زناشویی، رابطه‌ی شاگرد و معلم، رابطه‌ی هم‌کلاسی و هم دانشگاهی نمونه‌هایی از رابطه‌های بین انسانهاست. در مفهوم رابطه تعدادی از اعضای یک مجموعه را به تعدادی از اعضای یک مجموعه‌ی دیگر یا همان مجموعه نسبت می‌دهیم. مفهوم رابطه در ریاضی نیز همان مفهوم متداول را دارد. حالت‌های خاصی از رابطه، مفاهیم مهم بسیاری از شاخه‌های ریاضی را دربرمی‌گیرد. در این بخش به مفهوم رابطه در حالت کل و بررسی بعضی از حالت‌های خاصی از آن می‌پردازیم.

۱.۳ رابطه

معمولا از حرف R حرف اول $Relation$ برای یک رابطه استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند. R یک رابطه از A به B است هر گاه $R \subseteq A \times B$.

به طور خلاصه هر عضو از مجموعه‌ی توانی $P(A\times B)$ را یک رابطه از A به B می‌نامیم. هر گاه A ، m عضو و B ، n عضو داشته باشد می‌دانیم که $A\times B$ ، $m\times n$ عضو و $P(A\times B)$ ، 2^{mn} عضو دارد. لذا 2^{mn} رابطه از A به B می‌توان تعریف کرد.

تذکر ۳.۱.۱. هر گاه $R\subseteq A\times A$ آنگاه گوییم R یک رابطه روی A است. اگر $(x,y)\in R$ ، آنگاه گوییم x با y به وسیله‌ی R در رابطه هستند. . معمولا می نویسیم xRy و اگر $(x,y)\notin R$ و می‌نویسیم $x \not{R} y$.

مثال ۳.۱.۱. ۱. رابطه‌ی تساوی روی X را معمولا با I_x نمایش می‌دهیم :

$$I_x=\{(x,y)\in X\times X \mid x=y\}$$

رابطه‌ی تساوی را رابطه‌ی همانی یا قطری نیز می‌نامند و به صورت $\triangle_x$ نیز نمایش می‌دهند.

۲. رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی روی $\mathbb{R}$:

$$R_1=\{(x,y)\in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x\leqslant y\}$$

۳. رابطه‌ی مجذور روی اعداد صحیح:

$$R_2=\{(x,y)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x=y^2\}$$

۴. رابطه‌ی تشابه مثلثها:

۵. رابطه‌ی مثلثها و مساحت آنها:

اگر X مجموعه‌ی تمام مثلثها باشند و مساحت هر مثلث x را با S_x نمایش دهیم، آنگاه:

$$R_3=\{(x,y)\in X\times\mathbb{R} \mid S_x=y\}$$

۶. مجموعه‌ی نقاط یک دایره به مرکز مبدا و شعاع واحد:

$$R_۴ = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^۲ + y^۲ = ۱\}$$

۷. رابطه‌ی شمردن (یا عاد کردن) روی اعداد صحیح:

$$R_۵ = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \mid n\}$$

هر گاه m یک مقسوم علیه، n باشد، گوییم m ، n را عاد می‌کند. و یا m ، عدد n را می‌شمرد.

رابطه‌ی $R = X \times X$ را معمولا با نماد $R = \bigtriangledown_x$ نمایش می‌دهند. همچنانکه می‌دانید $\phi \times X = X \times \phi = \phi$. پس تنها یک رابطه از ϕ به X و از X به ϕ وجود دارد. در فصل قبل یاد گرفتیم که دو مجموعه‌ی غیرتهی A و B با هم برابرند اگر و تنها اگر $A \times B = B \times A$. لذا در حالت کلی یک رابطه از A به B ، یک رابطه از B به A نیست. اما متناسب با هر رابطه‌ی R از A به B می‌توان یک رابطه از B به A بدست می‌آید.

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه و R یک رابطه از X به Y باشد. در این صورت، $R^{-۱}$ (وارون رابطه‌ی R) یک رابطه از Y به X است و $yR^{-۱}x$ هر گاه xRy . به عبارتی

$$R^{-۱} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in R\}$$

$R^{-۱}$ را معکوس R می‌نامند.

مثال ۲.۱.۳. ۱ : فرض کنید $X = \{۱,۲,۳\}$ و $Y = \{a,b\}$ و $R = \{(۱,a),(۲,b),(۳,a)\}$

در این صورت $R^{-۱} = \{(a,۱),(a,۳),(b,۲)\}$

۲. وارون رابطه‌ی کمتر مساوی، رابطه‌ی بزرگتر مساوی است.

$$R_1^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leqslant y\}$$

۳. وارون رابطه‌ی عاد کردن، رابطه‌ی مضرب است. بدین معنی که

$$R_5^{-1} = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \text{n مضربی از m است}\}$$

۴. اگر X مجموعه مردان و Y مجموعه‌ی زنان باشند و R رابطه‌ی شوهر باشد، آنگاه R^{-1} رابطه‌ی زن خواهد بود. به عنوان مثال اگر xRy یعنی اگر x شوهر y باشد، آنگاه $yR^{-1}x$ است یعنی y زن x است.

۵. وارون رابطه‌ی خطی

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\}$$

به صورت

$$R^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x - 2}{3}\}$$

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه و R یک رابطه از A به B باشد. در این صورت مجموعه‌ی مولفه‌های اول زوج مرتب‌های R را دامنه‌ی R می‌نامیم و با نماد $Dom(R)$ نمایش می‌دهیم. Dom مخفف کلمه‌ی $Domain$ است. و مجموعه‌ی مولفه‌های دوم زوج مرتب‌های R را تصویر R (یا نگاره‌ی R یا برد R) می‌نامیم و با نماد $Im(R)$ نمایش می‌دهیم. Im مخفف کلمه $Image$ است. به عبارتی دیگر

$$Dom(R) = \{x \in A \mid (x, y) \in R, \exists y \in B\}$$

$$Im(R) = \{y \in B \mid (x, y) \in R, \exists x \in A\}$$

مثال ۳.۱.۳. ۱. دامنه و تصویر رابطه‌ی

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ۴x^{۲} + ۹y^{۲} = ۳۶\}$$

به صورت زیر است :

$$Dom(R) = [-۳, ۳], Im(R) = [-۲, ۲]$$

۲. فرض کنید $X = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $Y = \{۳, ۴, ۶, ۷, ۸\}$ و R رابطه‌ی عاد کردن باشد. در این صورت

$$R = \{(۲, ۴), (۲, ۶), (۲, ۸), (۳, ۳), (۳, ۶), (۴, ۴), (۴, ۸)\}$$

$$Dom(R) = \{۲, ۳, ۴\}, Im(R) = \{۳, ۴, ۶, ۸\}$$

قضیه ۱.۱.۳. اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، آنگاه

$$Im(R^{-۱}) = Dom(R), Dom(R^{-۱}) = Im(R)$$

اگرچه برای دو رابطه‌ی $R \subseteq X \times Y$ و $S \subseteq A \times B$

می‌توان اعمال جبری اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن و حتی تساوی بکار برد، اما برای سادگی کار معمولا دو رابطه‌ی R و S را موقعی با هم مقایسه می‌کنیم و اعمال جبری روی آن را بکار می‌بریم که هر دو زیر مجموعه‌ی یک حاصل‌ضرب دکارتی باشند.

تذکر ۲.۱.۳. دو رابطه‌ی R از A به B و S از X به Y با هم برابرند هرگاه: $A = X$، $B = Y$ و $R = S$.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید R و S دو رابطه از A به B باشند. در این صورت

$$(R\cap S)^{-۱} = R^{-۱}\cap S^{-۱}, (R\cup S)^{-۱} = R^{-۱}\cup S^{-۱}$$

در دوره‌های قبل و مباحث فصل اول، از اعداد اول مباحثی به میان آمد. حال اگر بخواهیم مجموعه‌ی تمام اعداد طبیعی را که دقیقا سه مقسوم علیه دارند، بیابیم، به صورت مجموعه‌ی مربع اعداد اول خواهد بود. $\{p^{۲}|$ یک عدد اول است $p\}$

حال اگر رابطه‌ی $S=\{(p,p^{۲})\mid$ یک عدد اول است $p\}$ را در نظر بگیریم، S زیرمجموعه‌ی رابطه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid y=x^{۲}\}$ می‌باشد، به طوریکه دامنه‌ی R را به مجموعه‌ی اعداد اول محدود کرده‌ایم. چنین عملی را تحدید R می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنید X و Y دو مجموعه و $A\subseteq X$ و R یک رابطه از X به Y باشد. تحدید R به A را با $R\mid_A$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم $R\mid_A=\{(x,y)\in R\mid x\in A$

مثال ۴.۱.۳. فرض کنید $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x=y^{۲}\}$ و $A=[۰,+\infty)$ در این صورت

$$R\mid_A=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid y=\sqrt{x}\}$$

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید R رابطه‌ای از X به Y و $A\subseteq X, B\subseteq X$ باشد. در این صورت :

$۱. Dom(R\mid_A)=Dom(R)\cap A$

$۲. R\mid_{A\cap B}=R\mid_A\cap R\mid_B$

$۳. R\mid_{A\cup B}=R\mid_A\cup R\mid_B$

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنید R رابطه‌ای از X به Y و $A\subseteq X$ باشد. در این صورت تصویر رابطه‌ی تحدید $R\mid_A$ را با $R(A)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان ثابت کرد که :

$$Im(R\mid_A)=\{y\in Y\mid\exists x\in A,(x,y)\in R\}$$

۲.۳ ترکیب رابطه‌ها

سه استان X ، Y و Z را به عنوان سه مجموعه و شهرهای هر استان را اعضای آن مجموعه در نظر بگیرید. راه‌های مستقیم شهرهای X به Y را رابطه‌ی S و راه‌های مستقیم شهرهای Y به Z را رابطه‌ی R بنامید. حال با اتصال این راه‌ها می‌توان شهرهای استان X را به استان Z مرتبط کنید. رابطه‌ای از X به Z را با ترکیب دو رابطه‌ی R و S بدست آورده‌اید. بدیهی است از شهر $x \in X$ به شهر $z \in Z$ تنها در صورتی راهی وجود دارد که یک شهر مانند $y \in Y$ چنان یافت شود که از x به y و از y به z راه موجود باشد.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید S رابطه‌ای از X به Y و R رابطه‌ای از Y به Z باشد. در این صورت ترکیب دو رابطه‌ای S و R را که با نماد $R \circ S$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم(آر او اس)، رابطه‌ای است از X به Z به طوریکه

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x, y) \in S, (y, z) \in R\}$$

مثال ۱.۲.۳. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳\}$ و $Y = \{a, b\}$ و $Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ، سه مجموعه و $R = \{(a, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma)\}$ ، $S = \{(۱, a), (۳, b)\}$ دو رابطه باشند. در این صورت

$$R \circ S = \{(۱, \alpha), (۳, \beta), (۳, \gamma)\}$$

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $S \subseteq X \times Y$ و $R \subseteq Y \times Z$ ، $A \subseteq X$ در این صورت :

الف :

$$(R \circ S)^{-۱} = S^{-۱} \circ R^{-۱}$$

ب :

$$Dom(R \circ S) = S^{-1}(Dom(R))$$

ج :

$$Im(R \circ S) = R(Im(S))$$

د :

$$R \circ S(A) = R(S(A))$$

برهان. الف : بنابه تعریف $R \circ S \subseteq X \times Z$ پس $(R \circ S)^{-1} \subseteq Z \times X$. با عضوگیری قضیه را ثابت می‌کنیم:

$$(z,x) \in (R \circ S)^{-1} \Longleftrightarrow (x,z) \in R \circ S$$

$$\Longleftrightarrow \exists y \in Y \ \ s.t. \ \ (x,y) \in S, (y,z) \in R$$

$$\Longleftrightarrow \exists y \in Y \ \ s.t. \ \ (y,x) \in S^{-1}, (z,y) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (z,x) \in S^{-1} \circ R^{-1}$$

اثبات قسمت ب و ج و د به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

برای آسانی درک ترکیب‌ها، از فلش‌ها، استفاده کنید. فرض کنید S رابطه‌ای از X به Y و R رابطه‌ای از Y به Z باشد، آنها را به صورت $X \xrightarrow{S} Y$ و $Y \xrightarrow{R} Z$ بنویسید. حال ترکیب آنها را به صورت $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{R} Z$ از انتها به ابتدا بنویسید.

ترکیب رابطه‌ها دارای عضو خنثی است. یعنی :

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید R رابطه‌ای از X به Y باشد. در این صورت :

الف :

$$I_Y \circ R = R$$

ب :

$$R \circ I_X = R$$

برهان. اثبات به خواننده واگذار می‌شود. □

ترکیب رابطه‌ها دارای خاصیت شرکت پذیری است یعنی :

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید T رابطه‌ای از X به Y ، S رابطه‌ای از Y به Z و R رابطه‌ای از Z به W باشد. در این صورت :

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$$

تذکر ۱.۲.۳. ترکیب رابطه‌ها دارای خاصیت جابجایی نیست، حتی اگر R و S روابطی روی مجموعه‌ی X باشند، $R \circ S$ و $S \circ R$ امکان دارد با هم برابر نباشند.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = x^۲ + ۱\}$$

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid y = ۲x + ۳\}$$

در این صورت

$$R \circ S = \{(x,y) \mid y = (۲x+۳)^۲ + ۱\}$$

$$S \circ R = \{(x,y) \mid y = ۲(x^۲+۱) + ۳\}$$

که به وضوح با هم برابر نیستند.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید R یک رابطه از X به Y باشد. در این صورت $R \subseteq R \circ R^{-۱} \circ R$

برهان. با عضوگیری به سادگی ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید R یک رابطه روی X باشد. R را خودتوان گوییم هر گاه $R \circ R = R$.

۳.۳ رابطه‌ی ترتیبی

بعضی از ویژگی‌ها و خصوصیات در یک رابطه، باعث وجود ترتیب چه به صورت جزئی و چه به صورت کلی و باعث وجود هم‌ارزی‌هایی شود که در بسیاری از شاخه‌ها، همچون آنالیز، توپولوژی و جبر کاربرد بسیاری داشته باشند.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید R یک رابطه روی X باشند. در این صورت :

الف : گوییم R دارای خاصیت انعکاسی است هر گاه

$$\forall x \in X \quad (x,x) \in R \text{ یا } xRx$$

همچنین می‌گوییم R یک رابطه‌ی انعکاسی یا بازتابی است.

ب : گوییم R دارای خاصیت تعدی یا ترایابی یا انتقالی است هر گاه :

$$\forall x,y,z \in X \quad xRy \ \wedge \ yRz \Longrightarrow xRz$$

همچنین می‌گوییم R یک رابطه‌ی تعدی است.

هرگاه R دارای دو خاصیت بازتابی و تعدی باشد، آنگاه گوییم R یک رابطه‌ی پیش ترتیبی است و گوییم X با R یک مجموعه‌ی پیش مرتب است.

ج : گوییم R دارای خاصیت تقارنی است هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad xRy \Longrightarrow yRx$$

همچنین می‌گوییم R یک رابطه‌ی متقارن است.

هرگاه R یک رابطه‌ی پیش ترتیبی و متقارنی باشد گوییم R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و گوییم X یک مجموعه‌ی هم‌ارز است . موضوع هم‌ارزی را به صورت گسترده در بخش آخر مورد بررسی قرار خواهیم داد.

د : گوییم R دارای خاصیت پادتقارنی است هرگاه

$$\forall x, y \in X \quad xRy \Longrightarrow y \not R x$$

مگر آنکه با هم مساوی باشند، به عبارتی دیگر

$$\forall x, y \in X \quad xRy \wedge yRx \Longrightarrow x = y$$

همچنین گوییم R یک رابطه‌ی پادمتقارن است.

هر گاه R یک رابطه‌ی پیش ترتیبی و پاد متقارن باشد، گوییم R یک رابطه‌ی ترتیبی جزئی است و همچنین گوییم X با رابطه‌ی R یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. معمولا می‌نویسیم (X, R) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است. در بسیاری از کتابها اگر R یک رابطه‌ی ترتیب جزئی باشد از علامت $\leq$ (کمتر مساوی) استفاده می‌کنند.

می‌دانیم که اگر R یک رابطه روی X باشد، آنگاه R^{-1} و $R \circ R$ نیز رابطه‌های روی X هستند. به یاددارید که رابطه‌ی همانی روی X را با I_X نمایش دادیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید R یک رابطه روی X باشد در این صورت :

الف : R دارای خاصیت انعکاسی است هر گاه $I_X \subseteq R$.

ب : R دارای خاصیت تقارنی است هر گاه $R = R^{-1}$.

ج : R دارای خاصیت تعدی است هر گاه $R \circ R \subseteq R$.

برهان. الف : می‌دانیم که $I_X = \{(x,x) | x \in X\}$ می‌دانیم R دارای خاصیت انعکاسی باشد، هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، $(x,x) \in R$ بنابراین حکم بدیهی است.

ب : فرض کنید R متقارن باشد. در این صورت $\forall x,y \in X \quad xRy \Longrightarrow yRx$ می‌دانیم $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ لذا $(x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$ بنابه خاصیت تقارن $(x,y) \in R \Longleftrightarrow (y,x) \in R \Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$ لذا

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$$

ج : بنابه تعریف ترکیب دو رابطه اگر $(x,y) \in R$ و $(y,x) \in R$، آنگاه $(x,z) \in R \circ R$. حال اگر R دارای خاصیت تعدی باشد، $(x,z) \in R$ پس $R \circ R \subseteq R$. برعکس اگر $R \circ R \subseteq R$ ، آنگاه به ازای $(x,z) \in R \circ R$ یک $y \in X$ چنان موجود است که $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$. بنابراین اگر $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ و $R \circ R \subseteq R$ پس $(x,z) \in R \circ R \subseteq R$ یعنی R دارای خاصیت تعدی است. $\square$

در مباحث نظریه‌ی رسته‌ها، از آنجا که اشیاء، همیشه مجموعه نیستند و نمی‌توان مفهوم رابطه و

خصوصیات انعکاسی، تقارن، و تعدی را به عضوگیری تعریف کرد. به همین دلیل احکام قضیه‌ی فوق مبنای تعریف این ویژگی‌ها می‌شود. البته مفهوم زیر شیء (به جای زیرمجموعه) را به وسیله‌ی تکریختی‌ها تعریف می‌کنند.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید R یک رابطه روی X باشد. در این صورت :

الف : اگر R رابطه پیش ترتیبی باشد، آنگاه R خودتوان است یعنی $R \circ R = R$

ب : اگر R تقارنی و تعدی باشد، آنگاه R خودتوان است.

برهان. اثبات به خواننده واگذار می‌شود. $\square$

مثال ۱.۳.۳. مجموعه $(R, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

می‌توان به جای $\mathbb{R}$ ، هر کدام از مجموعه‌های $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ قرار داد.

مثال ۲.۳.۳. فرض کنید X ، یک مجموعه و $P(X)$ مجموعه‌ی توانی X باشد. حال رابطه‌ی شمول (زیرمجموعه بودن) را روی $P(X)$ درنظر بگیرید. بدین معنی که A با B در رابطه است هر گاه $A \subseteq B$. $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

بدیهی است که به ازای هر $A \subseteq X$ ، $A \subseteq A$ پس دارای خاصیت انعکاسی است.

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ ، آنگاه $A = B$. پس دارای خاصیت پادتقارن است.

اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $A \subseteq C$ پس دارای خاصیت تعدی است. بنابراین $\subseteq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی $P(X)$ است.

مثال ۳.۳.۳. مجموعه‌ی اعدادطبیعی، $\mathbb{N}$ ، را در نظر بگیرید. رابطه‌ی عاد کردن (شمردن) روی $\mathbb{N}$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است. می‌دانیم m ، n را عاد می‌کند هرگاه n مضربی از m باشد و

می‌نویسیم $m \mid n$.

بدیهی است که $n = ۱ \times n$ ، لذا $n \mid n$ یعنی دارای خاصیت انعکاسی است.

اگر $n \mid m$ و $m \mid n$ پس $k_۱$ و $k_۲ \in \mathbb{N}$ چنان موجودند که $n = k_۱m$ و $m = k_۲n$ پس $n = k_۱k_۲n$ و لذا $k_۱ = k_۲ = ۱$ پس $m = n$ یعنی دارای خاصیت پادتقارن است.

اگر $m \mid n$ و $n \mid p$ پس $k_۱, k_۲ \in \mathbb{N}$ چنان موجودند که $n = k_۱m$ و $p = k_۲n$ پس $p = k_۱k_۲m$ یعنی $m \mid p$ و لذا دارای خاصیت تعدی است. پس $(\mathbb{N}, |)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

مثال ۴.۳.۳. فرض کنید X یک مجموعه‌ی دلخواه باشد، در این صورت (X, I_X) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

در مثال $(\mathbb{R}, \leq)$ می‌دانیم که به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ، $x \leq y$ یا $y \leq x$ است. اما در مثال $(P(X), \subseteq)$ و رابطه‌ی شمول بین هر دو عضو شاید برقرار نباشد. و در مثال $(\mathbb{N}, |)$ بدیهی است که رابطه‌ی شمردن بین هر دو عدد طبیعی برقرار نیست. در حالتی که بتوان بین تمام اعضای مجموعه رابطه برقرار کرد، گوییم آن مجموعه، یک مجموعه‌ی مرتب کلی است.

تعریف ۲.۳.۳. فرض کنید (X, R) یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. گوییم (X, R) یک مجموعه‌ی مرتب کلی یا مرتب خطی (یا به طور خلاصه مرتب)یا یک زنجیر است هر گاه به ازای هر دو عضو x و y در X ، yRx یا xRy.

بدیهی است که اگر (X, R) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq X$ ، (A, R) نیز یک مجموعه‌ی مرتب جزئی خواهد بود. اگر (A, R) یک مجموعه‌ی مرتب کلی باشند، آنگاه گوییم A یک زنجیر در X است.

مثال ۵.۳.۳. فرض کنید $X=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $P(X)$ با شمول ترتیب جزئی شده باشد. در این صورت

$$A=\{\phi,\{۱\},\{۱,۲\},\{۱,۲,۳\},X\}$$

یک زنجیر می‌باشد.

هنگامی که X یک مجموعه‌ی متناهی و $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X باشد، آنگاه به وسیله‌ی یک گراف جهتدار می‌توان، مجموعه‌ی مرتب $(X,\leq)$ را نمایش داد. به عنوان مثال اگر $X=\{۲,۳,۴,...,۱۰\}$ و R رابطه‌ی عاد کردن باشد در این صورت می‌توان نمایش زیر را برای ترتیب جزئی $(X,|)$ در نظر گرفت.

$$\begin{tikzcd}
۹ & ۶ & ۴ \arrow[r] & ۸ & ۱۰ \\
۳ \arrow[u] \arrow[ur] & & ۲ \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[urr] & & ۵ \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

حال اگر R رابطه‌ی کمترمساوی باشد، آنگاه به صورت زنجیر زیر در خواهد آمد.

$$۲\longrightarrow ۳\longrightarrow ۴\longrightarrow ۵\longrightarrow ۶\longrightarrow ۷\longrightarrow ۸\longrightarrow ۹\longrightarrow ۱۰$$

مثال ۶.۳.۳. فرض کنید $I=[۰,۱]$ ، $X=I\times I=I^۲$ رابطه‌ی $\leq_۱$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$(x_۱,y_۱)\leq_۱(x_۲,y_۲)\Longleftrightarrow x_۱\leq x_۲\wedge y_۱\leq y_۲$$

$(I^۲,\leq_۱)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی است.

خاصیت انعکاسی و پادتقارن ساده‌است. برای تعدی فرض کنید

$$(x_1, x_2) \leq_1 (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \leq_1 (x_3, y_3)$$

لذا $x_1 \leq x_2$ و $y_1 \leq y_2$ و $x_2 \leq x_3$ و $y_2 \leq y_3$ بنابه رابطه‌ی ترتیب کلی $\leq$ روی اعداد حقیقی پس $x_1 \leq x_3$ و $y_1 \leq y_3$ یعنی $(x_1, y_1) \leq_1 (x_3, y_3)$ واضح است که رابطه‌ی $\leq_1$ یک رابطه‌ی ترتیب کلی نیست زیرا که $(0, 1) \nleq (1, 0), (1, 0) \nleq (0, 1)$

رابطه فوق را برای $\mathbb{R}^2$ تعمیم دهید. این رابطه را رابطه‌ی ترتیب مولفه‌ای می‌نامند.

مثال ۷.۳.۳. رابطه‌ی $\leq_2$ را روی I^2 به صورت زیر تعریف می‌کنیم $(x_1, y_1) <_2 (x_2, y_2)$ هر گاه $x_1 < x_2$ یا اگر $x_1 = x_2$ آنگاه $y_1 < y_2$. بدین معنی که نقطه‌ی (x_2, y_2) یا در طرف راست نقطه‌ی (x_1, y_1) قرار گیرد و یا اگر روی یک خط عمودی قرار گرفتند نقطه‌ی (x_2, y_2) بالای نقطه‌ی (x_1, y_1) قرار گیرد. رابطه‌ی $\leq_2$ یک رابطه‌ی ترتیب کلی روی I^2 است.

رابطه فوق را برای $\mathbb{R}^2$ تعمیم دهید. این رابطه را رابطه‌ی ترتیب قاموسی می‌نامند.

حال در دو مثال فوق به جای I^2 ، دو مجموعه مرتب $(X, \leqslant_X)$ و $(Y, \leqslant_Y)$ در نظر بگیرید و رابطه‌ی مولفه‌ای $\leqslant_1$ را برای مجموعه‌ی $X \times Y$ به صورت زیر تعریف کنید.

$$(x_1, y_1) \leqslant_1 (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leqslant_X x_2 \wedge y_1 \leqslant_Y y_2$$

همچنین رابطه‌ی ترتیب قاموسی $\leqslant_2$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$(x_1, y_1) \leqslant_2 (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leqslant_X x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leqslant_Y y_2)$$

ترتیب جزئی بودن $\leqslant_1$ و کلی بودن $\leqslant_2$ را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنید $(X,\leqslant)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی (و یا کلی) و $A \subseteq X$ در این صورت :

الف : گوییم A از بالا کراندار است هر گاه حداقل یک عضو مانند $u \in X$ چنان یافت شود که به ازای هر $x \in A$ ، $x \leqslant u$. در این صورت گوییم u یک کران بالای A است. اگر u کران بالای A در A باشد، آنگاه گوییم A دارای عنصر ماکزیمم است و u را عنصر ماکزیمم A می‌نامیم. عنصر ماکزیمم A را با $max(A)$ نیز نمایش می‌دهند.

ب : گوییم A از پایین کراندار است، هرگاه حداقل یک عضو مانند $l \in X$ چنان یافت شود که به ازای هر $x \in A$ ، $l \leq x$. در این صورت گوییم l یک کران پایین A است. اگر l کران پایین A در A باشد، آنگاه گوییم A دارای عنصر مینیمم است و l را عنصر مینیمم A می‌نامیم. عنصر مینیمم A را با $min(A)$ نیز نمایش می‌دهند.

ج : A را یک زیرمجموعه‌ی کراندار می‌نامیم هرگاه هم از بالا کراندار باشد هم از پایین کراندار باشد. هرگاه مجموعه X کراندار باشد، آنگاه X دارای عنصر مینیمم و ماکزیمم خواهد بود.

مثال ۸.۳.۳. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. در این صورت مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P(X),\subseteq)$ دارای عنصر مینیمم ϕ و عنصر ماکزیمم X می‌باشد.

مثال ۹.۳.۳. $(\mathbb{N},\leq)$ دارای عنصر مینیمم است اما دارای عنصر ماکزیمم نیست. اما مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,...,۱۰\}$ هم دارای مینیمم هم دارای ماکزیمم است.

مثال ۱۰.۳.۳. $(\mathbb{R},\leq)$ نه دارای عنصر مینیمم است و نه دارای عنصر ماکزیمم است. بازه‌ی باز $(۰,۱) \subseteq \mathbb{R}$ کراندار است، اما نه عضو مینیمم و نه عضو ماکزیمم دارد.

مجموعه‌ی $I \times I$ با ترتیب قاموسی، دارای عنصر مینیمم $(\circ, \circ)$ و دارای عنصر ماکزیمم $(1, 1)$ است.

به عنوان تمرین ثابت کنید که عنصر ماکزیمم و مینیمم در صورت وجود یکتا هستند.

قبلا به این موضوع اشاره شد، که اگر $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و $A \subseteq X$ آنگاه $(A, \leq)$ نیز یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌باشد.

در مثال اول اگر $Y = P(X) \setminus \{\phi, X\}$ ، آنگاه $(Y, \subseteq)$ نیز یک مجموعه‌ی مرتب جزئی می‌باشد. اما Y نه دارای عنصر مینیمم و نه دارای عنصر ماکزیمم است. اما می‌دانیم که از مجموعه‌های تک عضویی کوچکتر نداریم و از مجموعه‌های $X \setminus \{a\}$ که $a \in X$ نیز مجموعه‌ی بزرگتر نداریم و می‌دانیم که این مجموعه‌ها منحصربفرد نیستند و نسبت به مجموعه‌هایی که با آنها قابل مقایسه هستند، حالت کمترین یا بیشترین دارند.

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. در این صورت :

الف : گوییم $a \in X$ یک عنصر ماکزیمال است هرگاه به ازای هر $x \in X$، اگر $a \leq x$ آنگاه $a = x$.

ب : گوییم $b \in X$ یک عنصر مینیمال است هرگاه به ازای هر $x \in X$، اگر $x \leq b$ آنگاه $x = b$.

مثال ۱۱.۳.۳. فرض کنید $Y = P(X) \setminus \{\phi, X\}$ و $(Y, \subseteq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. در این صورت هر مجموعه‌ی تک عضویی مانند $\{x\}$ که $x \in X$ یک عنصر مینیمال است و هر مجموعه‌ی به صورت $X \setminus \{x\}$ که $x \in X$ یک عنصر ماکزیمال است.

مثال ۱۲.۳.۳. اگر $(X, \leq)$ دارای عنصرمینیمم l باشد، آنگاه l عنصر مینیمال یکتا است و اگر دارای

عنصر ماکزیمم u باشد، آنگاه u عنصر ماکزیمال یکتا است.

از مثال‌های قبل متوجه می‌شویم که حتی یک مجموعه‌ی مرتب کلی یا خطی هم لزوما دارای عنصر ماکزیمم یا مینیمم نیست و هر زیرمجموعه‌ی از پایین (از بالا کراندار) آن نیز لزوما دارای عنصر مینیمم (ماکزیمم) نیست.

به عنوان مثال $(\mathbb{R}, \leq)$ هم خود دارای عنصر مینیمم نیست و هم بسیاری از زیرمجموعه‌های حتی کراندار هم دارای عنصر مینیمم نیستند. اما $(\mathbb{N}, \leq)$ دارای چنین خاصیتی است که هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی آن دارای عنصر مینیمم است. اثبات این مطلب به خواننده واگذار می‌شود.

تعریف ۵.۳.۳. مجموعه‌ی مرتب خطی یا کلی $(X, \leq)$ را یک مجموعه‌ی خوش ترتیب می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی آن دارای عنصر مینیمم باشد.

مثال ۱۳.۳.۳. بدیهی است که مجموعه‌ی اعداد طبیعی با رابطه‌ی شمردن یک مجموعه‌ی مرتب کلی نیست و لذا یک مجموعه‌ی خوش ترتیب نیست و یا به طور ساده که مجموعه‌ی $\{۲, ۳\}$ دارای عنصر مینیمم نیست. اما زنجیر $A = \{۲^n | n \in \mathbb{N}\}$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب است.

تذکر ۱.۳.۳. در تعریف مجموعه‌ی خوش ترتیب حتی اگر ترتیب کلی را به جزئی تغییر دهیم باز همان تعریف درست است. زیرا که هر مجموعه‌ی خوش ترتیب، یک مجموعه‌ی مرتب کلی خواهد شد. برای اثبات آن کافی است دو عضو دلخواه x و y را در نظر بگیریم عنصر مینیمم $\{x, y\}$ یا x است یا y لذا $x \leq y$ یا $y \leq x$ پس ترتیب خطی خواهد بود.

فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی و $A \subseteq X$ باشد. اگر A از بالا کراندار باشد، آنگاه مجموعه‌ی کران‌های بالای A ، غیرتهی خواهد بود. مجموعه‌ی کران‌های بالای A را با نماد

$U(A)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر A از پایین کراندار باشد، آنگاه مجموعه‌ی کران‌های پایین A غیرتهی است و این مجموعه را با نماد $L(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۳.۳. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی و $A \subseteq X$ باشد. در این صورت:

الف : عنصر مینیمم $U(A)$ را درصورت وجود سوپریمم A می‌نامیم و با $sup(A)$ نمایش می‌دهیم.

در بعضی کتابها از حروف اول انگلیسی کوچکترین کران بالا یعنی $lub(A)$ استفاده می‌کنند.

ب : عنصر ماکزیمم $L(A)$ را درصورت وجود، اینفیمم A می‌نامیم. به عبارتی ساده بزرگترین کران پایین A را اینفیمم A می‌نامیم و با $inf(A)$ نمایش می‌دهیم. در بعضی کتابها از حروف اول انگلیسی بزرگترین کران پایین یعنی $glb(A)$ استفاده می‌کنند.

از آنجا که در بسیاری از موارد برای سوپریمم و اینفیمم نیاز به علائمی است، لذا برای $sup(A)$ از نماد $\vee A = \vee_{x \in A} x$ و برای $inf(A)$ از نماد $\wedge A = \wedge_{x \in A} x$ استفاده می‌کنند. $\vee \wedge$ همان نمادهای ترکیب فصلی و عطفی هستند.

تعریف ۷.۳.۳. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد.

الف : گوییم X دارای خاصیت سوپریمم (کوچکترین کران بالا) است، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار آن دارای سوپریمم در X باشد.

ب : گوییم X دارای خاصیت اینفیمم (بزرگترین کران پایین) است، هرگاه هرزیرمجموعه‌ی از پایین کراندار آن دارای اینفیمم در X باشد.

قضیه ۳.۳.۳. مجموعه‌ی مرتب $(X, \leq)$ دارای خاصیت سوپریمم است اگر و تنها اگر دارای خاصیت اینفیمم باشد.

برهان. فرض کنید $(X, \leq)$ دارای خاصیت سوپریمم باشد و $A \subseteq X$ از پایین کراندار باشد. مجموعه‌ی کران‌های پایین A یعنی $L(A)$ غیرتهی است و هر عضو A یک کران بالا برای $L(A)$ است پس طبق خاصیت سوپریمم $L(A)$ دارای سوپریمم در X است. به وضوح $sup(L(A))$ یک کران پایین A است پس $sup(L(A))$ در $L(A)$ قرار دارد و لذا $sup(L(A)) = max(L(A))$. بنابراین A دارای اینفیمم $max(L(A))$ است. عکس آن نیز به همین شیوه ثابت می‌شود. $\square$

۴.۳ مشبکه

در بخش قبل یادآوری کردیم که لازم نیست هر زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی مرتب دارای sup و inf باشد. اما حالاتی خاص هستند که در بحث منطق ارزشمندند.

تعریف ۱.۴.۳. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(X, \leq)$ را یک مشبکه (لاتیس) می‌نامیم هرگاه به ازای هردو عضو $x, y \in X$، $sup(\{x, y\}) = x \vee y$ و $inf\{x, y\} = x \wedge y$ موجود باشد.

مثال‌های زیرمشبکه هستند.

مثال ۱.۴.۳. در مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\mathbb{N}, |)$ ،برای هر دو عدد طبیعی m و n ، $m \vee n = sup\{m, n\}$ کوچکترین مضرب مشترک m و n و $m \wedge n = inf\{m, n\}$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n می‌باشد.

مثال ۲.۴.۳. در مجموعه‌ی مرتب جزئی $(P(X), \subseteq)$ ، برای هر دو زیرمجموعه‌ی A, B از X ، اجتماع دو مجموعه، سوپریمم و $A \vee B = A \cup B$ و اشتراک دو مجموعه اینفیمم $A \wedge B = A \cap B$ آن دو مجموعه می‌باشد.

مثال ۳.۴.۳. در هر مجموعه‌ی مرتب کلی $(X, \leq)$ ، به ازای هر دو عضو $x, y \in X$ ، اگر $x \leq y$ ، آنگاه $x \vee y = y$ و $x \wedge y = x$.

مثال ۴.۴.۳. فرض کنید X مجموعه‌ی گزاره‌ها باشد. رابطه‌ی ترتیب جزئی بین دو گزاره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به ازای دو گزاره‌ی p و q ، $p \leq q$ اگر وتنهااگر $p \Longrightarrow q$ یک گزاره‌ی شرطی درست باشد. در این صورت از قوانین جذب می‌توان به سادگی استباط کرد که $p \wedge q = inf\{p, q\}$ و $p \vee q = sup\{p, q\}$ بدیهی است که $max(X) = T$ و $min(X) = F$

تعریف ۲.۴.۳. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(X, \leq)$ را یک مشبکه‌ی کامل می‌نامیم هرگاه هر زیرمجموعه‌ی X دارای sup و inf در X باشد.

معمولا $sup(X) = max(X)$ را با ۱ و $inf(X) = min(X)$ را با ۰ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۴.۳. $(P(X), \subseteq)$ ، یک مشبکه‌ی کامل است.

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مشبکه باشد. در این صورت X دارای خواص زیر است.

الف: شرکت پذیری $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

ب: جابجایی $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$

ج: خودتوانی $x \wedge x = x, x \vee x = x$

د: جذب $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

معمولا مشبکه‌ی X را با $(X, \vee, \wedge)$ نمایش می‌دهند.

۵.۳ جبر بول

در مبحث مشبکه مثال‌های مهم و ارزشمندی از فصل‌های منطق و مجموعه‌ها، آورده شد. اما در بحث گزاره‌ها و مجموعه‌ها قوانین مهمی همچون قوانین توزیع پذیری، قوانین دمورگان، در گزاره‌ها نقیض هرگزاره، گزاره‌ی همیشه درست و گزاره‌ی همیشه نادرست، همچنین در مجموعه‌ها، مجموعه‌ی مرجع متمم هرمجموعه، مجموعه‌ی تهی وجود دارد که جای آن درمشبکه‌ها، خالی است.

نکته ۱.۵.۳. در حالت کلی قانون توزیع پذیری در مشبکه‌ها برقرار نیست.

مثال ۱.۵.۳. فرض کنید $X = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و رابطه‌ی ترتیب جزئی روی آن به صورت زیر باشد.

$$۱ \leq ۲, ۱ \leq ۳, ۱ \leq ۴, ۱ \leq ۵, ۲ \leq ۵, ۳ \leq ۵, ۴ \leq ۵$$

به وضوح مشبکه‌ی $(X, \leq)$ دارای خاصیت پخشی نیست، زیرا:

$$۲ \vee (۳ \wedge ۴) = ۲ \vee ۱ = ۲ \qquad (۲ \vee ۳) \wedge (۲ \vee ۴) = ۵ \wedge ۵$$

تعریف ۱.۵.۳. مشبکه‌ی $(X, \vee, \wedge)$ را توزیع پذیر یا پخشی می‌نامند هرگاه برای هر سه عضو $x, y, z \in X$،

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

تعریف ۲.۵.۳. مشبکه‌ی کراندار $(X, \vee, \wedge)$ را دارای متمم می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، یک $y \in X$ چنان موجود باشد که

$$x \wedge y = ۰ \qquad x \vee y = ۱,$$

معمولا متمم هر x را با x' یا $\sim x$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۱.۵.۳. متمم هر x ، یکتاست.

تعریف ۳.۵.۳. مشبکه‌ی $(X, \vee, \wedge)$ را یک جبر بول می‌نامیم هرگاه کراندار، توزیع پذیر و دارای متمم باشد.

در بعضی از کتابهای مبانی علوم ریاضی یک جبربول را با $(X, +, \circ)$ ، $+$ به جای $\vee$ و $\circ$ به جای $\wedge$ نمایش می‌دهند.

مثال ۲.۵.۳. $(P(X), \cup, \cap)$ یک جبر بول است.

مثال ۳.۵.۳. اگر X مجموعه‌ی گزاره‌ها باشد، $(X, \vee, \wedge)$ یک جبر بول است.

مثال ۴.۵.۳. فرض کنید $X = \{F, T\}$ در مجموعه‌ی گزاره‌ها باشد. آنگاه $(X, \vee, \wedge)$ یک جبر بول است.

قضیه ۲.۵.۳. قوانین زیر در هر جبر بول، برقرار هستند.

الف: قانون نفی مضاعف : $\sim (\sim x) = x$

ب: قوانین دمورگان: $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$

$\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$

ج: قانون عکس نقیض: $x \leq y \Longleftrightarrow \sim y \leq \sim x$

در شاخه‌های مهندسی مخصوصا مهندسی برق از مباحث مشبکه و جبر بول استفاده‌های زیادی می‌شود. مدارهای منطقی و مدارهای الکتریکی برپایه‌ی جبربول پایه‌گذاری شده است. از آنجا که توابع بولی نیز در مباحث ترکیبیات و ریاضیات گسسته به صورت گسترده مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد، از بیان و تشریح آن صرفنظر می‌کنیم.

۶.۳ جبر هیتینگ

مباحث مشبکه‌ها به صورتی با جبرگزاره‌ها، ارتباط مستقیم دارند. در هر مشبکه می‌توان با sup و inf ترکیب فصلی و عطفی ساخت. اگر مشبکه کراندار باشد، آنگاه عضو ۰ و ۱ متناظر با گزاره‌ی همیشه درست و گزاره‌های همیشه نادرست هستند. هرگاه مشبکه دارای متمم باشد، آنگاه به ازای هر x ، $\sim x$ وجود دارد و متناظر با آنها به ازای هر گزاره‌ی p نقیض آن یعنی $\sim p$ وجود دارد. حال می‌خواهیم متناظر با ترکیب شرطی در جبرگزاره‌ها، در یک مشبکه‌ی کراندار یک عمل تعریف کنیم. در جبر گزاره‌ها می‌دانیم $p \longrightarrow q \equiv q \vee \sim p$ حال اگر یک مشبکه‌ی کراندار دارای متمم داشته باشیم، به سادگی می‌توانیم $x \longrightarrow y$ را به صورت $\sim x \vee y$ تعریف کنیم. اما اگر مشبکه دارای متمم نباشد، باید شرایطی تعریف کنیم که بتوان همان مفهوم را القا کند. تعریف می‌کنیم:

$$x \longrightarrow y = sup\{z|z \wedge x \leq y\}$$

تعریف ۱.۶.۳. مشبکه‌ی کراندار $(X, \leq)$ را یک جبرهیتینگ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، $x \longrightarrow y$ موجود باشد.

مثال ۱.۶.۳. هر جبر بول یک جبرهییتینگ است و $x \longrightarrow y = \sim x \vee y$

بدیهی است که $y \leq x \longrightarrow y$ ، زیرا که $x \wedge y \leq y$.

به یاد دارید که در جبر گزاره‌ها، ترتیب را به صورت ترکیب شرطی تعریف کردیم. قانون تفکیک دو مقدم همان مفهوم ترکیب شرطی در مشبکه‌ها را بیان می‌کند که در آن

$$p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv (p \wedge q) \longrightarrow r$$

ترکیب شرطی $q \longrightarrow r$ همان عمل شرطی مشبکه و دو ترکیب شرطی دیگر همان ترتیب گزاره‌هاست.

مثال ۲.۶.۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $O(X)$ مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های باز X باشد. در این صورت $O(X)$ با رابطه‌ی شمول و اجتماع و اشتراک، یک جبرهیتینگ است ولی جبربول نیست. تعمیم مثال فوق را می‌توان به صورت قضیه‌ی زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۶.۳. هر مشبکه‌ی کامل توزیع پذیر، یک جبرهیتینگ است.

۷.۳ رابطه‌ی هم‌ارزی و افراز

تا بحال هم در دوره‌های تحصیلی قبل ، هم در فصل گذشته بارها از هم‌ارزی و معادل بودن استفاده کرده‌ایم. دو گزاره‌ی هم ارز، دو مجموعه که تعداد اعضای آنها با هم برابرند، هم‌ارزی اجتماع دو مجموعه‌ی جدا ازهم و هم‌ضرب آنها، نمونه‌هایی از هم‌ارزی هستند که در همین کتاب خوانده‌ایم. موقعی که اعضای یک مجموعه را با معیاری باهم مقایسه می‌کنیم و ارزش بعضی از آنها را یکسان می‌بینیم به نوعی هم‌ارزی را بین آنها تعریف کرده‌ایم.

تعریف ۱.۷.۳. فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه‌ی X باشد. گوییم R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است هرگاه دارای ویژگی‌های بازتابی، تقارن و تعدی باشند.

تذکر ۱.۷.۳. معمولا به جای R، از علامت $\sim$ در روابط هم‌ارز استفاده می‌کنند و مجموعه‌ی هم‌ارز X با رابطه‌ی $\sim$ با نماد $(X,\sim)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱.۷.۳. رابطه‌ی همانی یا تساوی I_X، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. $I_X=\{(x,x)|x\in X\}$

مثال ۲.۷.۳. رابطه‌ای قدرمطلق روی اعدادحقیقی یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\quad x\sim y\Longleftrightarrow \mid x\mid=\mid y\mid$$

می‌دانید که اگر $x\geq 0$، $\mid x\mid=x$ و اگر $x\leq 0$، $\mid x\mid=-x$.

مثال ۳.۷.۳. رابطه‌ی جزء صحیح روی اعداد حقیقی، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad x \sim y \Longleftrightarrow [x] = [y]$$

هرعدد حقیقی x را می‌توان به صورت $x = n + d$ نوشت که $n \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq d < 1$، جزء صحیح x را با $[x] = n$ نمایش و تعریف می‌کنیم.

مثال ۴.۷.۳. روی $\mathbb{R}$ رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف کنید :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

رابطه‌ی $\sim$ ، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

الف: خاصیت انعکاسی : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x \sim x$

ب: خاصیت تقارن :به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ اگر $x \sim y$ آنگاه $n \in \mathbb{Z}$ چنان موجود است که: $x - y = n$ لذا $y - x = -n \in \mathbb{Z}$ پس $y \sim x$.

ج: خاصیت تعدی : به ازای هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ اگر $x \sim y$ و $z \sim y$ آنگاه $m, n \in \mathbb{Z}$ چنان یافت می‌شوند که: $x - y = n$ و $y - z = m$ لذا $x - z = m + n \in \mathbb{Z}$ بنابراین $x \sim z$.

تعریف ۲.۷.۳. رابطه‌ی هم‌نهشتی به هنگ (یا به سنج یا به مد یا به پیمانه‌ی) n روی اعداد صحیح را با $\equiv_n$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \equiv_n y \Longleftrightarrow n \mid x - y$$

یعنی x با y هم‌نهشت است هرگاه $x - y$ مضربی از n باشد.

مثال ۵.۷.۳. رابطه‌ی هم‌نهشتی روی Z یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

الف: خاصیت بازتابی : $\quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad x - x = 0 = 0 \times n \Longrightarrow x \equiv_n x$

ب: خاصیت تقارن : $\quad \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \equiv_n y \Longrightarrow n \mid x - y \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad s.t.$

$x - y = kn \quad y - x = -kn \Longrightarrow n \mid y - x \Longrightarrow y \equiv_n x$

ج: خاصیت تعدی : $\forall x, y, z \in \mathbb{Z} \quad x \equiv_n y \ \& \ y \equiv_n z \Longrightarrow n \mid x - y \ \& \ n \mid y - z$

$\Longrightarrow n \mid (x - y) + (y - z) \Longrightarrow n \mid x - z \Longrightarrow x \equiv_n z$

مثال ۶.۷.۳. روی مجموعه‌ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$(m, n) \sim (r, s) \Longleftrightarrow m + s = n + r$$

می‌دانید که هر عضو $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به صورت زوج مرتب (m, n) می‌باشد، حال :

الف : خاصیت بازتابی : $\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad m + n = m + n \Longrightarrow (m, n) \sim (m, n)$

ب : خاصیت تقارنی :

$(m, n) \sim (r, s) \Longrightarrow m + s = n + r \Longrightarrow r + n = s + m \Longrightarrow (r, s) \sim (m, n)$

ج : خاصیت تعدی :

$(m, n) \sim (r, s) \ \& \ (r, s) \sim (t, u) \Longrightarrow$

$m + s = n + r \ \& \ r + t = s + u \Longrightarrow m + s + r + t = n + s + r + u \Longrightarrow$

$m + t = n + u \Longrightarrow (m, n) \sim (t, u)$

رابطه‌ی فوق روی مجموعه‌ی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ زیربنای ساخت اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ می‌باشد. درباره‌ی آن فکرکنید.

تعریف ۳.۷.۳. فرض کنید $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X و $x \in X$ باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{y \in X | x \sim y\}$ را با $\lceil x \rceil$ یا $\bar{x}$ یا $\frac{x}{\sim}$ نمایش می‌دهند و کلاس هم‌ارزی x یا رده‌ی هم‌ارزی x یا دسته‌ی هم‌ارزی x می‌نامند.

مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی در X را با $\frac{X}{\sim}$ نمایش می‌دهیم. $\frac{X}{\sim} = \{\lceil x \rceil | x \in X\}$ و معمولا آن را مجموعه‌ی خارج‌قسمتی X می‌نامیم.

هر گاه $(X,\sim)$ یک مجموعه‌ی هم‌ارز باشد به ازای هر $x \in X$ بدیهی است که $x \in \lceil x \rceil$ پس $\lceil x \rceil$ غیرتهی است.

قضیه ۱.۷.۳. فرض کنید $(X,\sim)$ یک مجموعه‌ی هم‌ارز و $x,y \in X$ باشد. در این صورت:

$$\lceil x \rceil = \lceil y \rceil \Longleftrightarrow y \sim x$$

برهان. فرض کنید $y \sim x$، آنگاه $y \in \lceil x \rceil$ و $x \in \lceil y \rceil$ به ازای هر $z \in \lceil x \rceil$، از آنجا که $z \sim x$ و $x \sim y$ بنابه خاصیت تعدی $z \sim y$ پس $z \in \lceil y \rceil$ یعنی $\lceil x \rceil \subseteq \lceil y \rceil$ به همین صورت می‌توان ثابت کرد که $\lceil y \rceil \subseteq \lceil x \rceil$ پس $\lceil x \rceil = \lceil y \rceil$

برعکس فرض کنید $\lceil y \rceil = \lceil x \rceil$ از آنجا که $y \in \lceil y \rceil$ پس $y \in \lceil x \rceil$ یعنی $y \sim x$. □

نتیجه ۱.۷.۳. اگر $y \nsim x$، آنگاه $\lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil = \phi$

برهان. از عکس نقیض استفاده کنید. فرض کنید $z \in \lceil x \rceil \cap \lceil y \rceil$ پس $z \sim x$ و $z \sim y$. در نتیجه بنابه خاصیت تعدی $y \sim x$. □

قضیه ۲.۷.۳. فرض کنید $(X,\sim)$ یک مجموعه‌ی هم‌ارز باشد. در این صورت:

$$X = \cup_{x\in X} \lceil x \rceil$$

برهان. بدیهی است که به ازای هر x، $\lceil x \rceil \subseteq X$ پس، $\cup_{x\in X}\lceil x \rceil \subseteq X$ از طرفی به ازای هر $x \in X$، $x \in \lceil x \rceil$ لذا $x \in \cup_{x\in X}\lceil x \rceil$. بنابراین $X \subseteq_{x\in X} \lceil x \rceil$ □

تعریف ۴.۷.۳. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. یک مجموعه از زیرمجموعه‌های ناتهی X مانند P را یک افراز برای X می‌نامیم هر گاه :

الف : اعضای P دوبه دو مجزا باشند.

ب : اجتماع اعضای P، X گردد. در این حالت می‌گوییم P، X را می‌پوشاند. به عبارتی دیگر زیرمجموعه‌ی P از $P(X)$ را یک افراز X می‌نامیم هر گاه :

۱. هر کدام غیرتهی باشد.

۲. اشتراک هر دو عضو آن تهی گردد.

۳. اجتماع آن X باشد.

قضیه ۳.۷.۳. اگر $(X, \sim)$ یک مجموعه‌ی هم‌ارز باشد، آنگاه $\frac{X}{\sim}$ یک افراز برای X تشکیل می‌دهد.

برهان. دو قضیه و نتیجه‌ی قبل ، نتیجه حاصل میشود. □

مثال ۷.۷.۳. در رابطه‌ی همانی روی X، هر کلاس هم‌ارزی یک مجموعه‌ی تک عضوی است.

مثال ۸.۷.۳. در رابطه‌ی قدرمطلق روی $\mathbb{R}$، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، کلاس هم ارزی به صورت $\lceil x\rceil = \bar{x} = \{x, -x\}$ و مجموعه‌ی خارج قسمتی به صورت $\frac{\mathbb{R}}{||} = \{\lceil x\rceil | x \geq 0\}$ می‌باشد.

مثال ۹.۷.۳. در رابطه‌ی جزءصحیح روی $\mathbb{R}$، به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، کلاس هم ارزی به صورت $\lceil n\rceil = \bar{n} = \{n + d | 0 \leq d < 1\} = \lceil n, n+1)$ و مجموعه‌ی خارج‌قسمتی به صورت $\frac{\mathbb{R}}{[]} = \{n | n \in \mathbb{Z}\}$ می‌باشد.

مثال ۱۰.۷.۳. در رابطه‌ی $\sim$ روی $\mathbb{R}$ به صورت $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

$$\lceil x\rceil = \bar{x} = \{x + n | n \in \mathbb{Z}\}$$

در این صورت
$$\frac{\mathbb{R}}{\sim} = \{\lceil x\rceil | 0 \leq x < 1\}$$

مثال ۱۱.۷.۳. در رابطه‌ی هم‌نهشتی به هنگ n روی $\mathbb{Z}$ ، به ازای هر $x \in \mathbb{Z}$

$$[x] = \bar{x} = \{x + kn | k \in \mathbb{Z}\} \text{ و } \frac{\mathbb{Z}}{\equiv_n} = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, ..., \overline{n - ۱}\}$$

رابطه‌ی هم‌نهشتی در بسیاری از شاخه‌های ریاضی مخصوصا شاخه‌ی جبر کاربرد زیادی دارد. به همین خاطر مجموعه‌ی خارج‌قسمتی $\mathbb{Z}$ تحت رابطه‌ی هم نهشتی به مد n را با $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهند. $\mathbb{Z}_n$ به عنوان یک گروه و یک حلقه‌ی جابجایی و اگر P اول باشد، به عنوان یک میدان مثال ارزشمندی می‌باشد. در مباحث فوق متوجه می‌شویم که در هر رابطه‌ی هم‌ارزی، مجموعه‌ی خارج‌قسمتی تشکیل یک افراز می‌دهد. حال چنین سوالی به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان از طریق یک افراز، یک رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف کرد. و اگر جواب مثبت است، چه رابطه‌ای بین افراز و مجموعه‌ی خارج‌قسمتی بدست آمده وجود دارد.

تعریف ۵.۷.۳. فرض کنید P یک افراز برای مجموعه‌ی غیرتهی X باشد. در این صورت رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $\quad x \sim y \Longleftrightarrow \exists A \in P \quad s.t \quad x, y \in A$

به عبارتی دیگر x, y در رابطه‌اند، هرگاه هر دو در یک عضو از افراز P یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

قضیه ۴.۷.۳. رابطه‌ی $\sim$ روی X در افراز P یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

برهان. الف : از آنجا که $X = \cup_{A \in P}$ پس به ازای هر $x \in X$ ، یک $A \in P$ چنان موجود است که $x \in A$ پس $x \sim x$.

ب : خاصیت تقارن بدیهی است.

ج : فرض کنید $x \sim y$ و $y \sim z$ پس مجموعه‌های A و B در P چنان موجودند که $x, y \in A$ و

$y,z \in B$ پس $y \in A \cap B$ بنابه تعریف افراز $A = B$ پس $x,y,z \in A$ یعنی $x \sim z$

بنابراین $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. $\square$

قضیه ۵.۷.۳. فرض کنید P یک افراز مجموعه‌ی ناتهی X و $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی وابسته به افراز P باشد. در این صورت $P = \frac{X}{\sim}$

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که هر عضو افراز P ، مانند A یک کلاس هم‌ارزی است. فرض کنید $x \in A$ پس به ازای هر $y \in [x]$ ، از آنجا که $y \sim x$ پس $x,y \in A$ و در نتیجه $[x] \subseteq A$. برعکس اگر $y \in A$ پس $y \sim x$ یعنی $y \in [x]$. بنابراین $A = [x] \iff x \in A$ از آنجا که $X = \cup_{A \in P} A$ و $X = \cup_{x \in X}[x]$ و به ازای هر $x \in X$ ، تنها یک $A \in P$ موجود است که $x \in A$ پس $P = \frac{X}{\sim}$. $\square$

نتیجه ۲.۷.۳. فرض کنید $(X, \sim)$ یک مجموعه‌ی هم‌ارز باشد. در این صورت رابطه‌ی هم‌ارزی حاصل از افراز $\frac{X}{\sim}$ همان رابطه‌ی $\sim$ است.

مثال ۱۲.۷.۳. فرض کنید $P = \{\{۱,۲\},\{۳,۴\},\{۵,۶\}\}$ یک افراز برای مجموعه‌ی $X = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد. رابطه‌ی هم‌ارزی که به وسیله‌ی افراز بدست می‌آید، به طور خلاصه $۱ \sim ۲, \quad ۳ \sim ۴, \quad ۵ \sim ۶$ و به طور کامل به صورت زیر می‌باشد.

$$\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۴),$$
$$(۵,۵),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

اگر بخواهیم یک رابطه‌ی هم‌ارزی را روی یک مجموعه‌ی متناهی به وسیله‌ی نمودار نمایش دهیم، یا یک گراف بدون جهت که هر عضو آن یک راس و هر رابطه یک یال خواهد بود. ترکیب چند یال را هم به عنوان یک یا در نظر می‌گیریم و نیاز به رسم آن نیست.

نکته ۱.۷.۳. در مجموعه‌ای از مجموعه‌ها، هر عضو یک مجموعه است. حال اگر یک افراز برای یک مجموعه و یا یک مجموعه‌ی خارج‌قسمتی برای یک مجموعه‌ی هم‌ارز داشته باشیم، هر کدام از کلاس‌های هم‌ارزی به عنوان عضوی از آن مجموعه‌ای است که همه‌ی اعضای آن، نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی دارای ارزش یکسان هستند و ما همه‌ی آنها را به دید یکسانی می‌بینیم. انگار همه‌ی آنها روی هم منطبق شده و یک عضو را نمایش می‌دهند.

در مثال رابطه‌ی قدرمطلق به مثابه‌ی آن است که قسمت منفی $\mathbb{R}$ را روی قسمت مثبت منطبق کنیم یعنی مجموعه‌ی خارج‌قسمتی آن همان $\mathbb{R}^{\geq ۰}$ است. در مثال رابطه‌ی جزءصحیح، مجموعه‌ی خارج‌قسمتی همانند $\mathbb{Z}$ عمل می‌کند. در مثال رابطه‌ی همنهشتی، مجموعه‌ی خارج‌قسمتی همانند مجموعه‌ی متناهی تمام باقیمانده‌های اعداد صحیح بر n عمل می‌کند.

بعد از بحث توابع تناظرهای فوق و مثال‌های مشابه آن‌ها را به سادگی می‌توانیم بررسی کنیم.

تمرین

۱. با تعریف زوج مرتب به صورت $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$ ثابت کنید

$$X\times Y\subseteq P\left(P(X\cup Y)\right).$$

۲. فرض کنید R و S دو رابطه از X به Y باشند. ثابت کنید

الف: $(R\cap S)^{-۱}=R^{-۱}\cap S^{-۱}$ ب: $(R\cup S)^{-۱}=R^{-۱}\cup S^{-۱}$

۳. قضیه‌ی ۳.۱.۳ را ثابت کنید.

۴. قضیه‌ی ۱.۲.۳ قسمت ب، ج و د را ثابت کنید.

۵. قضیه‌ی ۲.۲.۳ را ثابت کنید.

۶. ثابت کنید ترکیب رابطه‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است. یعنی

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

۷. ثابت کنید $R \subseteq R \circ R^{-1} \circ R$.

۸. فرض کنید R یک رابطه از X به Y و $A \subseteq X$ باشد. ثابت کنید $A \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ اگر و تنها اگر $A \subseteq R^{-1}(R(A))$.

۹. فرض کنید A، B، C و D مجموعه و R یک رابطه از B به C باشد. ثابت کنید

الف: $R \circ (A \times B) = A \times R(B)$

ب: $(C \times D) \circ R = R^{-1}(C) \times D$

۱۰. رابطه‌ای مثال بزنید که

الف: انعکاسی و متقارن باشد، اما متعدی نباشد.

ب: انعکاسی و متعدی باشد، اما متقارن نباشد.

ج: متقارن و متعدی باشد، اما انعکاسی نباشد.

د: پادمتقارن و متعدی باشد، اما انعکاسی نباشد.

ه: انعکاسی و متعدی باشد، اما پادمتقارن نباشد.

۱۱. ثابت کنید

الف: اگر R انعکاسی و متعدی باشد، آنگاه خودتوان است.

ب: اگر R متقارن و متعدی باشد، آنگاه خودتوان است.

۱۲. فرض کنید R یک رابطه روی X باشد.

الف: R یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است اگر و تنها اگر $R \circ R = R$ و $R \cap R^{-1} = I_X$.

ب: $R = I_X$ اگر و تنها اگر ترتیب جزئی و هم‌ارزی باشد.

۱۳. ثابت کنید رابطه‌ی ترتیب قاموسی روی I^2 یک رابطه‌ی ترتیب کلی است.

۱۴. ثابت کنید هر زیرمجموعه‌ی I^2 با ترتیب قاموسی دارای $\sup$ و $\inf$ در I^2 است.

۱۵. برای $\mathbb{Z}$ ترتیب تعریف کنید که یک مجموعه‌ی خوش‌ترتیب شود.

۱۶. ثابت کنید اعداد گویا و اعداد گنگ دارای خاصیت سوپریمم (کوچکترین کران بالایی) نیستند.

۱۷. زنجیرهای $(\mathbb{N}, |)$ را به دست آورید.

۱۸. ثابت کنید مجموعه‌ی اعداد طبیعی، با رابطه‌ی شمردن (عاد کردن) یک مشبکه است.

۱۹. فرض کنید $X = \{2, 3, 4, \cdots 10\}$ و رابطه‌ی شمردن روی X تعریف شده باشد. عناصر مینیمال و ماکزیمال X را به دست آورید.

۲۰. ثابت کنید هر مجموعه‌ی مرتب کلی یک مشبکه است.

۲۱. ثابت کنید $(P(X), \subseteq)$ یک مشبکه‌ی کامل است.

۲۲. قضیه‌ی ۲.۴.۳ را ثابت کنید.

۲۳. قضیه‌ی ۲.۵.۳ را ثابت کنید.

۲۴. فرض کنید $X = \{1, 2, 3\}$ نمودار مشبکه‌ی $(P(X), \subseteq)$ را رسم کنید.

۲۵. فرض کنید D_{60} مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۶۰ باشد. نمودار مشبکه‌ی $(D_{60}, |)$ را رسم نمایید.

۲۶. فرض کنید X مجموعه‌ی توابع حقیقی مقدار با دامنه‌ی I باشد. رابطه‌ی $\leqslant$ را برای X به صورت زیر تعریف کنید.

$$\forall f, g \in X \qquad f \leqslant g \Longleftrightarrow \forall t \in I \qquad f(t) \leqslant g(t)$$

همچنین تعریف کنید $h = f \vee g$ و $k = f \wedge g$ که

$$h(x) = (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ و } k(x) = (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ثابت کنید $(X, \leqslant, \wedge, \vee)$ یک مشبکه است.

۲۷. ثابت کنید $(D_{30}, 1)$ یک مشبکه کامل است.

۲۸. یک زیرمجموعه‌ی کراندار از یک مجموعه‌ی مرتب جزئی مثال بزنید که:

الف: کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین نداشته باشد.

ب: عنصر ماکسیمال و عنصر مینیمال نداشته باشد.

ج: بیش از یک عنصر مینیمال و بیش از یک عنصر ماکزیمال داشته باشد.

۲۹. ثابت کنید مجموعه‌ی $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ در رابطه‌ی نموداری زیر، مشبکه نیست.

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[r] \arrow[ddr] & d \arrow[dr] & \\
a \arrow[ur] \arrow[dr] & & & f \\
& c \arrow[r] \arrow[uur] & e \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

۳۰. ثابت کنید در یک مجموعه‌ی خوش ترتیب هر زیرمجموعه‌ی از بالا کراندار، کوچکترین کران بالای یکتا دارد.

۳۱. ثابت کنید یک مجموعه‌ی مرتب جزئی متناهی، دارای عنصر مینیمال و عنصر ماکزیمال است.

۳۲. هر زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ را باز می‌نامیم هرگاه اجتماع خانواده‌ای از بازه‌های باز باشند. فرض کنید

$O(\mathbb{R})$ مجموعه‌ی زیرمجموعه‌های باز $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت ثابت کنید $O(\mathbb{R})$ با رابطه‌ی شمول، اجتماع و اشتراک یک جبر هیتنیگ است، اما جبر بول نیست.

۳۳. رابطه‌ی $\sim$ روی مجموعه‌ی $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$(a,b) \sim (r,s) \Longleftrightarrow as = br$$

ثابت کنید: ۱) رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

۲) به ازای هر زوج (a,b) زوج (r,s) موجود است که r و s نسبت به هم اولند و $(a,b) \sim (r,s)$.

۳) اگر هر کلاس هم‌ارزی $[(a,b)]$ را به صورت a/b در نظر بگیریم که a و b نسبت به هم اولند، آنگاه $X/\sim = Q$.

۴) رابطه‌ی $\sim'$ روی Q با $\frac{a}{b} \sim' \frac{c}{d}$ هرگاه $ad = bc$ همان رابطه‌ی $\sim$ است.

۳۴. فرض کنید R یک رابطه انعکاسی روی X باشد. ثابت کنید: R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است اگر و تنها اگر $R = R \circ R^{-1} \circ R$.

۳۵. فرض کنید R و S دو رابطه‌ی هم‌ارزی روی X باشند، ثابت کنید:

اگر $R \circ S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است آنگاه $R \circ S = S \circ R$.

۳۶. فرض کنید $\{A_i\}_{i\in I}$ و $\{B_j\}_{j\in J}$ به ترتیب افرازهای برای مجموعه‌ی A و B باشند. ثابت کنید $\{A_i \times B_j | (i,j) \in I \times J\}$ یک افراز برای $A \times B$ است.

۳۷. کدام یک از رابطه‌های زیر روی $\mathbb{R}$ رابطه‌ی هم‌ارزی است.

الف: $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^c$

ب: $x \sim y \Longleftrightarrow |x-y| < 1$

ج: $x \sim y \Longleftrightarrow x \geqslant y$

۳۸. مجموعه‌های خارج‌قسمتی زیر را بیابید.

الف: X/I_X ب: X/∇_X که در آن $\nabla_X = X \times X$.

۳۹. فرض کنید $P = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$ روی $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ باشد، نمودار رابطه‌ی هم‌ارزی X/P را رسم کنید.

برای تحقیق:

تعداد افرازهای متفاوت یک مجموعه‌ی nـ عضویی را عدد nـ ام بِل $(Bell)$ می‌نامند و با B_n نمایش می‌دهند. با استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_k \\ &= 1 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n} B_n \end{aligned}$$

فصل ۴

تابع

مقدمه

گر چه در مباحث سورهای عمومی و وجودی و گزاره‌نماها، تابع را تعریف کردیم. اما در این فصل می‌خواهیم به عنوان حالت خاصی از رابطه‌ها، تابع را به طور گسترده‌تر مورد بررسی قرار دهیم. تابع در تمامی شاخه‌های ریاضی نقش مهم و اساسی ایفا می‌کند. حتی قبل از تعریف تابع، ردپای آن در جبر گزاره‌ها و اعمال روی مجموعه‌ها، به وضوح دیده می‌شود.

۱.۴ تابع

در این بخش مفاهیم پایه‌ای تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنید R یک رابطه از X به Y باشد.

الف) R را یک رابطه کامل می‌نامند، هرگاه $\mathrm{Dom}(R) = X$.

چنین رابطه‌هایی را به توابع چند مقداری هم تعبیر می‌کنند.

ب) R را ساده یا یک تابع جزئی می‌نامند، هرگاه

$$\forall (x_۱, y_۱),\ (x_۲, y_۲) \in R, \quad x_۱ = x_۲ \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

تعریف ۲.۱.۴. رابطه‌ی f از X به Y را یک تابع می‌نامیم هرگاه ساده و کامل باشد یعنی

الف) $\mathrm{Dom}(f) = X$.

ب) به ازای هر دو عضو (x_1, y_1) و (y_1, y_2) از f،

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

اگر $(x, y) \in f$ باشد، معمولاً می‌نویسیم $y = f(x)$ یعنی به صورت یک گزاره‌نما نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۴. تعریف فوق با تعریف داده شده در جبر گزاره‌ها معادل است.

الف) فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد. بنابه شرط اول $\mathrm{Dom}(f) = X$

$$\forall x \in X,\ \ \exists\, y \in Y \ \ \text{s.t.} \ \ (x, y) \in f$$

بنابه شرط دوم

$$\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in f, \quad x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

لذا

$$\forall x \in X,\ \ \exists!\, y \in Y \ \ \text{s.t.} \ \ (x, y) \in f$$

حال اگر گزاره‌نمای $P(x, y)$ را همان $(x, y) \in f$ و یا $y = f(x)$ در نظر بگیریم همان مفهوم به دست می‌آید. حال اگر

$$\forall x \in X,\ \ \exists!\, y \in Y \ \ \text{s.t.} \ \ y = f(x)$$

حال اگر تابع f را همه‌ی زوج مرتب‌هایی که در گزاره سوری فوق صدق می‌کند در نظر بگیریم، آنگاه بنابه سور عمومی $\mathrm{Dom}(f) = X$ و بنابه سور یکتایی

$$\forall (x_۱, y_۱),\ (x_۲, y_۲) \in f, \quad x_۱ = x_۲ \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

در تابع f از X به Y گزاره‌نمایی که اعضای X را به Y نسبت می‌دهند، ضابطه‌ی تابع f می‌نامند. در مبحث رابطه‌ها دیدیم اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، آنگاه $\mathrm{Dom}(R) \subseteq X$ و $\mathrm{Im}(R) \subseteq Y$. لذا اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد، آنگاه $\mathrm{Dom}(f) = X$ و $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$. بنابراین X همان دامنه است، اما Y شامل تصویر تابع f است. به همین خاطر Y را هم‌دامنه تابع f می‌نامیم و با $\mathrm{CoDom}(f)$ یا به صورت ساده $Cod(f)$ نمایش می‌دهیم. تصویر تابع f را با $R(f)$ نیز نمایش می‌دهند که R حرف اول کلمه $Range$ به معنای برد است.

تذکر ۱.۱.۴. در برخی از شاخه‌های ریاضی و علوم کامپیوتر، از جمله‌ی ((تابع $y = f(x)$)) استفاده می‌کنند که منظور ((تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$)) است که f تابعی از $X = \mathrm{Dom}(f)$ به Y شامل $\mathrm{Im}(f)$ است.

مثال ۱.۱.۴. بدانید که رابطه‌ی f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ از $\mathbb{R}^{\geqslant ۰}$ به $\mathbb{R}$ یک تابع است، اما از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ یک تابع نیست. یک تابع جزئی است. زیرا که شرط اول برقرار نیست.

مثال ۲.۱.۴. رابطه‌ی f با ضابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ تابع نیست. اما f از $[-۱, ۱]$ به $\mathbb{R}^{\geqslant ۰}$ یک تابع است که ضابطه‌ی آن به صورت $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ واضح‌تر است.

تذکر ۲.۱.۴. یک تابع یکتا از $\emptyset$ به مجموعه Y وجود دارد که آن را تابع تهی می‌نامیم، اما هیچ تابعی از یک مجموعه غیر تهی به تهی وجود ندارد.

تعریف ۳.۱.۴. دو تابع $f : A \to B$ و $g : X \to Y$ با هم برابرند هرگاه $A = X$، $Y = B$ به ازای هر $x \in X$، $f(x) = g(x)$.

تذکر ۳.۱.۴. در دو تابع $f : X \to Y$ و $g : X \to Z$ حتی اگر به ازای هر $x \in X$ $\quad f(x) = g(x)$، دو تابع با هم برابر نیستند مگر آنکه $Y = Z$.

در فصل قبل تحدید رابطه‌ها در دامنه و هم‌دامنه توضیح داده شده است. تحدید تابع همان تحدید رابطه است.

تعریف ۴.۱.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$، تحدید تابع f را با $f\mid_A$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم

$$f\mid_A = \{(x,y) \in f|_{x\in A}\}$$

قضیه ۲.۱.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $\mathrm{Im}(f) \subseteq W \subseteq Y$ باشد. در این صورت

الف) $f\mid_A$ یک تابع از A به Y است.

ب) g از X به W با ضابطه‌ی $g(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ یک تابع است.

برهان. الف) می‌دانیم که

$$\mathrm{Dom}(f\mid_A)=\mathrm{Dom}(f)\cap A$$

لذا

$$\mathrm{Dom}(f\mid_A)=X\cap A=A$$

از آنجا که $f\mid_A\subseteq f$ پس از شرط دوم به وضوح برقرار است.

ب) می‌دانیم که $X=\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)$. پس شرط اول برقرار است.

فرض کنید که $y_۱=g(x_۱)$ و $y_۲=g(x_۲)$ لذا $y_۱=f(x_۱)$ و $y_۲=f(x_۲)$ پس اگر $x_۱=x_۲$

بنابه تابع بودن f ، $y_۱=y_۲$ پس $y_۱=g(x_۱)=g(x_۲)$ پس g یک تابع است. $\square$

قبلاً در مورد تابع همانی I_X بارها سخن به میان آمده است. حال اگر $A\subseteq X$، آنگاه تابع تحدید $I_X\mid_A$ را تابع شمول می‌نامیم و آن را با $\mathfrak{i}_A$ نمایش می‌دهیم. به عبارتی $\mathfrak{i}_A:A\to X$ با ضابطه‌ی $\mathfrak{i}_A(x)=x$ تابع شمول A است.

هر زوج مرتب (x,y) در $X\times Y$ را با تابعی مانند f از $\{۱,۲\}$ به $X\cup Y$ که در آن $f(۱)=x\in X$ و $f(۲)=y\in Y$ تعریف کردیم.

حال تابعی با هم‌دامنه‌ی $\{۰,۱\}$ را با نام تابع مشخصه معرفی می‌کنیم.

تعریف ۵.۱.۴. فرض کنید $A\subseteq X$ یک مجموعه‌ی غیر تهی باشد. در این صورت تابع $\mathcal{X}_A$ که $\mathcal{X}_A:X\to\{۰,۱\}$ را تابع مشخصه‌ی A می‌نامیم و می‌خواهیم ((خی A یا کای A)) و به صورت

زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \in X \setminus A \end{cases}$$

۲.۴ ترکیب توابع

در فصل رابطه، ترکیب دو رابطه و دامنه و تصویر رابطه‌ی مرکب را مورد بررسی قرار دادیم. ترکیب توابع نیز به عنوان رابطه به همان صورت است.

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ داده شده است.

ترکیب دو تابع f و g را با $g \circ f: X \to Z$ نمایش داده و به صوت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall\, x \in X \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

به عبارت دیگر ار آنجا که $g \circ f$ یک رابطه از X به Z است، پس

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z |\, \exists\, y \in Y: \quad (x, y) \in f \quad f(y, z) \in g\}$$

بدیهی است که $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = X$.

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \{g(f(x)) | x \in x\}$$

مثال ۱.۲.۴. دو تابع f و g روی $\mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ مفروض است. در این صورت $f \circ g(x) = f(g(x)) = \sin(x^۲ - ۱)$

و $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^۲ x - ۱$

مثال ۲.۲.۴. فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^{\geqslant ۰} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$ داده شده است. از آنجا که $\mathrm{Im}(f) = [۰, \infty)$ پس f را به صورت $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geqslant ۰}$

می‌توان تعریف کرد.

در این صورت

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^۲ + ۱) = \sqrt{x^۲ + ۱}$$

و یا

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^۲ + ۱}$$

به همین صورت

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ + ۱$$

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ و $h : Z \to W$ داده شده‌اند.

الف) $I_Y \circ f = f$ و $f \circ I_X = f$

ب) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

برهان. به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود. □

در فصل مجموعه‌ها، دیدیم که $A \times C \cup B \times D \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$ پس اگر R رابطه‌ای از A به C و S رابطه‌ای از B به D باشد. در این صورت R و S را می‌توان به عنوان رابطه‌هایی از $A \cup B$ به $C \cup D$ در نظر گرفت و $R \cup S$ نیز رابطه‌ای از $A \cup B$ به $C \cup D$ خواهد بود و بنابراین اگر f تابعی از A به C و g تابعی از B به D باشد، آنگاه $f \cup g$ رابطه‌ای از $A \cup B$ به $C \cup D$ خواهند بود. بنابه تابع بودن f و g، $\mathrm{Dom}(f) = A$ و $\mathrm{Dom}(g) = B$ پس $\mathrm{Dom}(f \cup g) = A \cup B$.
بنابراین $f \cup g$ یک رابطه‌ی کامل است.

لذا برای تابع بودن $f \cup g$ شرط یا شرایطی لازم است که در قضیه‌ی زیر بیان می‌شود.

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنید $f : A \to C$ و $g : B \to D$ دو تابع باشند به طوری که به ازای هر $x \in A \cap B$، $f(x) = g(x)$. در این صورت $h = f \cup g$ از $A \cup B$ به $C \cup D$ یک تابع است.

برهان. واضح است که $Dom(h) = A \cup B$. کافی است ثابت کنیم که h یک تابع جزئی است.

فرض کنید (x, y_1) و (x, y_2) در h باشند. سه حالت پیش می‌آید.

الف) (x, y_2) و (x, y_1) در f باشد. که بنابه تابع بودن f، $y_1 = y_2$.

ب) (x, y_1) و (x, y_2) در g باشد. که بنابه تابع بودن g، $y_1 = y_2$.

ج) (x, y_1) در f و (x, y_2) در g باشد که بنابه فرض به ازای هر $x \in A \cap B$ ، $f(x) = g(x)$

پس $y_2 = g(x) = f(x) = y_1$.

بنابراین در هر حالت $y_1 = y_2$ و یعنی h یک تابع است. □

معمولاً تابع h را یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نامند و آن را به صورت زیر نمایش می‌دهند

$$h(x) = (f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

به تعمیم فوق می‌توان توابع چند ضابطه‌ای را نیز تعریف کرد.

بدیهی است که اگر $A \cap B = \emptyset$، آنگاه $f \cup g$ در هر صورت یک تابع است.

به ازای هر تابع $f : X \to Y$ یک تابع یکتا مانند $g : X \times \{1\} \to Y$ با ضابطه‌ی $g(x, 1) = f(x)$ می‌توان تعریف کرد.

حال اگر A و B دو مجموعه باشند، می‌دانیم $A \sqcup B = A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$ هم‌ضرب A و B است.

از قضیه‌ی فوق به راحتی می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنید $f : A \to C$ و $g : B \to D$ دو تابع باشند. در این صورت $h = f \sqcup g : A \sqcup B \to C \sqcup D$ یک تابع است.

بدیهی است که اگر $A \cap B = \emptyset$ و $C \cap D = \emptyset$ در این صورت $f \sqcup g = f \cup g$.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید $f : A \to C$ و $g : B \to D$ دو تابع باشند. در این صورت رابطه‌ی $f \times g : A \times B \to C \times D$ با ضابطه‌ی $(f \times g)(a,b) = \big(f(a), g(b)\big)$ یک تابع است.

برهان. فرض کنید $(a,b) \in A \times B$، $a \in A$ و $b \in B$ پس تنها یک عضو $c \in C$ و یک عضو $d \in D$ موجود است که $f(a) = c$ و $g(b) = d$ پس یک عضو منحصر بفرد $(c,d) \in C \times D$ چنان موجود است که $\big(f(a), g(b)\big) = (c,d)$. لذا

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ \ \exists!\ (c,d) \in C \times D \ \text{ s.t.}$$

$$(f \times g)(a,b) = \big(f(a), g(b)\big) = (c,d)$$

بنابراین $f \times g$ یک تابع از $A \times B$ به $C \times D$ است. $\square$

نتیجه ۱.۲.۴. تابع $f \times g$ در قضیه‌ی فوق، یکتاست.

تذکر ۱.۲.۴. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند. در این صورت دو تابع $\mathfrak{i}_X$ و $\mathfrak{i}_Y$ با $\mathfrak{i}_X : X \to X \sqcup Y$ و $\mathfrak{i}_Y : Y \to X \sqcup Y$ که $\mathfrak{i}_1(x) = (x, 1)$ و $\mathfrak{i}_2(y) = (y, 2)$ وجود دارند. این توابع همانند توابع شمول عمل می‌کنند به همین خاطر با $\mathfrak{i}$ نمایش داده و با توابع شمول نام می‌بریم.

همچنین دو تابع $p_1 : X \times Y \to X$ و $p_2 : X \times Y \to Y$ با ضابطه‌های $p_1(x,y) = x$ و

$p_2(x,y)=y$ وجود دارند. این توابع را توابع تصویری می‌نامیم. اگر مجموعه‌ی $X\times Y$ را روی صفحه نمایش دهیم، بدیهی است که تصویر نقطه‌ی (x,y) روی محور Xها همان x و تصویر آن روی محور Yها همان y می‌باشد. به همین دلیل این توابع را توابع تصویری می‌نامیم.

قضیه ۵.۲.۴. مجموعه‌های غیرتهی X و Y و دو تابع تصویری $p_1 : X\times Y\to X$ و $p_2 : X\times Y\to Y$ مفروضند. در این صورت به ازای دو تابع $f : Z\to X$ و $g : Z\to Y$ یک تابع منحصر بفرد $h : Z\to X\times Y$ موجود است که $p_1\circ h=f$ و $p_2\circ h=g$.

برهان. فرض کنید دو تابع $f : Z\to X$ و $g : Z\to Y$ داده شده باشند. رابطه‌ی hرا که $h : Z\to X\times Y$ با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall z\in Z \quad h(z)=\big(f(z),g(z)\big)$$

ار آنجا که f و g تابع هستند، پس به ازای هر $z\in Z$، $f(z)$ و $g(z)$ موجود است لذا $h(z)=\big(f(z),g(z)\big)$ موجود است. در نتیجه $\mathrm{Dom}(h)=Z$. حال اگر $z_1=z_2$، آنگاه $f(z_1)=f(z_2)$ و $g(z_1)=g(z_2)$. بنابراین $\big(f(z_1),g(z_1)\big)=\big(f(z_2),g(z_2)\big)$ و در نهایت $h(z_1)=h(z_2)$ پس h یک تابع است. $p_1\circ h(z)=p_1\big(f(z),g(z)\big)=f(z)$ و $p_2\circ h(z)=p_2\big(f(z),g(z)\big)=g(z)$. حال ثابت می‌کنیم h یکتاست. فرض کنید تابع دیگری مانند $k : Z\to X\times Y$ چنان موجود باشد که $p_1\circ k=f$ و $p_2\circ k=g$. لذا به ازای هر z $\quad p_1\circ k(z)=p_1(k(z))=f(z)$ و $p_2\circ k(z)=p_2(k(z))=g(z)$. از آنجا که $k : Z\to X\times Y$ پس به ازای هر $z\in Z$ زوج مرتب یکتای $(x,y)\in X\times Y$ چنان موجود است که $k(z)=(x,y)$ بنابه فرض $p_1\circ k(z)=p_1(x,y)=x=f(z)$ و

$p_۲ \circ k(z) = p_۲(x,y) = y = g(z)$. بنابراین $k(z) = \big(f(z), g(z)\big)$ و یعنی $k = h$. پس h یکتاست. برای درک بهتر موضوع به دیاگرام جابجایی زیر دقت فرمایید.

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "P_۱"'] \arrow[r, "P_۲"] & Y \\ & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "h"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$\square$

در بسیاری از کتابهای نظریه رسته‌ها تابع یکتای فوق را با نماد $< f, g >$ بکار می‌برند.

قضیه ۶.۲.۴. فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی غیر تهی و $\mathfrak{i}_۱ : X \to X \sqcup Y$ و $\mathfrak{i}_۲ : Y \to X \sqcup Y$ دو تابع شمول باشند. در این صورت به ازای هر دو تابع $f : X \to Z$ و $g : Y \to Z$، یک تابع منحصر بفرد $h : X \sqcup Y \to Z$ چنان موجود است که $h \circ \mathfrak{i}_۲ = g$ و $h \circ \mathfrak{i}_۱ = f$.

برهان. متناسب با دو تابع $f : X \to Z$ و $g : Y \to Z$ دو تابع یکتا $f_۱ : X \times \{۱\} \to Z$ و $g_۱ : Y \times \{۲\} \to Z$ با ضابطه‌های $f_۱(x, ۱) = f(x)$ و $g_۱(y, ۲) = g(y)$ موجود است.

تابع $h : X \sqcup Y \to Z$ را به صورت $h = f_۱ \cup g_۱$ با ضابطه‌ی

$$h(t) = \begin{cases} f(x) & , \quad t = (x, ۱) \in X \times \{۱\} \\ g(y) & , \quad t = (y, ۲) \in Y \times \{۲\} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. لذا به ازای هر دو تابع $f : X \to Z$ و $g : Y \to Z$، تابع $h : X \sqcup Y \to Z$ با ضابطه‌ی فوق می‌توان تعریف کرد که $h \circ \mathfrak{i}_۱(x) = h(x, ۱) = f(x)$ و $h \circ \mathfrak{i}_۲(y) = h(y, ۲) = g(y)$. یکتایی h با شرایط قضیه را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم. برای درک بهتر موضوع به دیاگرام جابجایی زیر دقت فرمایید.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & X \sqcup Y \arrow[d, dotted, "h"] & Y \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

$\square$

در بسیاری از کتابهای نظریه رسته‌ها تابع یکتای فوق را با نماد $\lceil f, g \rceil$ بکار می‌برند. ضرب و هم‌ضرب توابع را نیز می‌توان با کمک مفاهیم دو قضیه‌ی فوق به صورت نمودارهای زیر نمایش داد. کافی است به جای Z در قضایای فوق به ترتیب از مجموعه‌های $C \sqcup D$ و $C \times D$ استفاده کرد.

$$\begin{tikzcd} C & C \times D \arrow[l, "P_1"'] \arrow[r, "P_2"] & D \\ A \arrow[u, "f"] & A \times B \arrow[l, "P_1"] \arrow[r, "P_2"'] \arrow[u, dotted, "f \times g"] & B \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & A \sqcup B \arrow[d, dotted, "f \sqcup g"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "i_1"'] & C \sqcup D & D \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

۳.۴ تصویر و تصویر معکوس یک مجموعه

در فصل رابطه و ترتیب، تصویر و تصویر معکوس یک مجموعه را تحت یک رابطه تعریف کرده‌ایم. همان مفاهیم را روی تابع دوباره تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ باشد. در این صورت:

الف) تصویر مجموعه‌ی A تحت تابع f را با $f(A)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

ب) تصویر معکوس مجموعه‌ی B تحت تابع f را با $f^{-1}(B)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

مثال ۱.۳.۴. تابع f را با ضابطه‌ی $y = x^۲$ در نظر بگیرید.

الف) $f((۰,۲)) = (۰,۴)$ ب) $f([-۱,۳]) = [۰,۹]$

ج) $f^{-۱}([۰,۱]) = [-۱,۱]$ د) $f^{-۱}([-۵,۴]) = [-۲,۲]$

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع، و $x \in X$ در این صورت:

الف) $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ د) $f(X) = \mathrm{Im}(f)$

ب) $f(\emptyset) = \emptyset$ ه) $f^{-۱}(Y) = X$

ج) $f^{-۱}(\emptyset) = \emptyset$

برهان. بدیهی است. $\square$

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. در این صورت:

الف) اگر $A \subseteq B \subseteq X$، آنگاه $f(A) \subseteq f(B)$

ب) اگر $C \subseteq D \subseteq Y$، آنگاه $f^{-۱}(C) \subseteq f^{-۱}(D)$.

برهان. با عضوگیری به راحتی ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $\{B_i\}_{i \in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های Y باشند. در این صورت:

الف) $f^{-۱}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-۱}(B_i)$

ب) $f^{-۱}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-۱}(B_i)$

برهان. ب)

$$x \in f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall\, i \in I \quad f(x) \in B_i$$
$$\Leftrightarrow \forall\, i \in I \quad x \in f(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

□

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $\{A_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های X باشند. در این صورت:

الف) $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

ب) $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$

برهان. الف)

$$y \in f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \Leftrightarrow \exists\ x \in \bigcup_{i\in I} A_i; \quad \text{s.t.}\ \ y \in f(x)$$
$$\Leftrightarrow \exists\ i \in I\ \exists\ x \in A_i; \quad \text{s.t.}\ \ y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow \exists\ i \in I\ \ y \in f(A_i) \Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

□

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ باشند. در این صورت:

الف) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ب) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

برهان. الف)

$$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$$

ب)

$$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in f^{-1}(B) \text{ s.t. } f(x) = y$$

$$\Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow y \in B$$

$$x \in f^{-1}(B) \text{ s.t. } f(x) = y$$

$\square$

مثال ۲.۳.۴. در مثال $f(x) = y = x^2$

اگر $A = [0, 2]$، آنگاه $f(A) = [0, 4]$ و $f^{-1}(f(A)) = [-2, 2]$. یعنی $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$.

اگر $B = [-5, 4]$، آنگاه $f^{-1}(B) = [-2, 2]$ و $f(f^{-1}(B)) = [0, 4]$ پس $f(f^{-1}(B)) \subsetneq B$.

نتیجه ۱.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ باشد. در این صورت:

الف) $f(A) = f(f^{-1}(f(A)))$

ب) $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$

قضیه ۶.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $B \subseteq Y$ باشد. در این صورت:

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$$

برهان.

$$x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in (f^{-1}(B))^c$$

$\square$

نتیجه ۲.۳.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع و $A, B \subseteq Y$ باشند. در این صورت:

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}B$$

۴.۴ تابع یک به یک، پوشا و دوسویی

در بسیاری از شاخه‌های ریاضی به خصوص حسابان، برای تعریف بعضی توابعی و یا حل بعضی از سوالات نیازمند آن است که تابعی را از دامنه و هم‌دامنه تحدید کرد تا بتوان تابع معکوس آن را به دست آورد. به همین خاطر نیاز به تعریف ویژگی‌های بعضی از توابع هستیم.

تعریف ۱.۴.۴. تابع $f : X \to Y$ را یک به یک می‌نامیم، هرگاه گزاره‌ی شرطی تعریف تابع به یک گزاره‌ی دو شرطی تبدیل شود. بدین معنی که

$$\forall\, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f \quad x_1 = x_2 \ \Leftrightarrow y_1 = y_2$$

به عبارتی دیگر f یک تابع یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع f یک به یک است هرگاه به ازای هر دو عضو $x_1, x_2 \in X$، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$. و بنا بر قانون عکس نقیض اگر $x_1 \neq x_2$، آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$.

تعریف ۲.۴.۴. تابع $f:X\to Y$ را پوشا گوییم، هرگاه $\mathrm{Im}(f)=Y$. به عبارتی دیگر

$$\forall\, y\in Y\ \ \exists\, x\in X\ \ \text{s.t.}\ \ f(x)=y$$

تعریف ۳.۴.۴. تابع $f:X\to Y$ را دوسویی گوییم هرگاه یک به یک و پوشا باشد. در این صورت گوییم f یک تناظر یک به یک بین X و Y است و همچنین می‌گوییم X و Y با هم متناظر یا معادل هستند.

به عبارتی دیگر تابع $f:X\to Y$ است هرگاه

$$\forall\, y\in Y\ \ \exists!\, x\in X\ \ \text{s.t.}\ \ f(x)=y$$

تعریف ۴.۴.۴. فرض کنید $f:X\to Y$ یک تابع باشد.

الف) گوییم f دارای معکوس چپ است، هرگاه تابعی مانند $g:Y\to X$ چنان موجود باشد که $g\circ f=I_X$.

ب) گوییم f دارای معکوس راست است هرگاه تابعی مانند $h:Y\to X$ چنان موجود باشد که $f\circ g=I_Y$.

مثال ۱.۴.۴. تابع خطی به صورت $y=۲x+۳$ دوسویی است. و معکوس چپ و راست به صورت $y=\dfrac{x-۳}{۲}$ دارد.

مثال ۲.۴.۴. تابع $f:\mathbb{R}^{\geqslant ۰}\to\mathbb{R}(\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^{\geqslant ۰})$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ یک به یک است اما پوشا نیست.

مثال ۳.۴.۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=x^{3}-x$ پوشا است اما یک به یک نیست.

$$f(0)=f(1)=f(-1)=0$$

مثال ۴.۴.۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x$ نه یک به یک است و نه پوشا.

تذکر ۱.۴.۴. معکوس چپ و یا معکوس راست یک تابع در صورت وجود همیشه یکتا نیست.

مثال ۵.۴.۴. تابع $f:\mathbb{R}^{\geqslant 0}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$ دارای بی‌نهایت معکوس چپ است.

مثلاً دو تابع g و h با ضابطه های زیر معکوس چپ f هستند.

$$g(x)=\begin{cases} x^{2} & , \quad x\geqslant 0 \\ 0 & , \quad x<0 \end{cases} \qquad\qquad h(x)=\begin{cases} x^{2} & , \quad x\geqslant 0 \\ 1 & , \quad x<0 \end{cases}$$

ار آنجا که $f(x)\geqslant 0$ و $x\geqslant 0$ پس

$$g\circ f(x)=g(f(x))=(f(x))^{2}=(\sqrt{x})^{2}=x$$

$$h\circ f(x)=h(f(x))=\cdots=x$$

مثال ۶.۴.۴. تابع ثابت $f:\mathbb{R}\to\{0\}$ بی‌نهایت معکوس راست دارد.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $f:X\to Y$ دارای معکوس چپ و معکوس راست باشد. در این صورت تمام معکوس‌های چپ و راست با هم برابرند.

برهان. فرض کنید $g:Y\to X$ یک معکوس چپ دلخواه و $h:Y\to X$ یک معکوس راست دلخواه باشد. بنا بر تعریف معکوس چپ و راست $g\circ f=I_X$ و $f\circ g=I_Y$. بنابه قضیه‌ی ۱.۲.۴

$$g=g\circ I_Y=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=I_X\circ h=h$$

پس $g = h$.

بنابراین اگر f معکوس چپ و راست داشته باشد، آنگاه همه‌ی آنها با هم برابرند و یک معکوس منحصر بفرد که آن را با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم به طوری که

$$f \circ f^{-1} = I_Y \quad \text{و} \quad f^{-1} \circ f = I_X$$

در این صورت گوییم f معکوس‌پذیر است.

حال اگر f را به عنوان یک رابطه در نظر بگیریم، $f^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in f\}$. □

قضیه ۲.۴.۴. تابع $f : X \to Y$، معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر دوسویی باشد.

برهان. اگر f دوسویی باشد، آنگاه

$$\forall\, y \in Y \;\; \exists\,!\, x \in X \quad \text{s.t.} \quad (x,y) \in f$$

پس

$$(f(x), x) \in f^{-1}$$

و یا

$$\forall\, y \in Y \;\; \exists\,!\, x \in X \quad \text{s.t.} \quad (y,x) \in f^{-1}$$

لذا f^{-1} یک تابع است و

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x) = x$$

$$f^{-1} \circ f(y) = f(x) = y$$

حال اگر f معکوس‌پذیر باشد، آنگاه

$$\forall\ x \in X\ ,\ \forall\ y \in Y$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y$$

اگر $f(x_2) = f(x_1)$، آنگاه $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$ در نتیجه $x_1 = x_2$ پس f یک به یک است و

$$\forall\ y \in Y\ \ \exists!\ x \in X \quad \text{s.t.} \quad f^{-1}(y) = x\ ,\ \ f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$$

پس f پوشا است. □

حال اگر یکی از شرایط یک به یکی یا پوشایی را داشته باشیم به مفاهیم دیگری دست می‌یابیم که در قضایای زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ داده شده است. در این صورت شرایط زیر با هم هم‌ارزند.

الف) f یک به یک است.

ب) به ازای هر خانواده از زیر مجموعه‌های X مانند $\{A_i\}_{i\in I}$،

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

ج) f دارای معکوس چپ است.

د) به ازای هر دو تابع h و k از Z به X، اگر $f \circ h = f \circ k$ آنگاه $h = k$.

برهان. قضیه‌ی فوق را با دو مرحله ثابت می‌کنیم.

اول: الف $\Leftrightarrow$ ب.

دوم: الف $\leftarrow$ ج $\leftarrow$ د $\leftarrow$ الف. پس تمامی گزاره‌ها با هم، معادل خواهند بود.

مرحله اول: الف $\leftarrow$ ب:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap_{i\in I} A_i) &\Leftrightarrow \exists\, x_\circ \in \bigcap A_i \quad \text{s.t.} \quad y = f(x_\circ) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x_\circ \in A_i\,, \quad \forall\, i \in I \quad \text{s.t.} \quad y = f(x_\circ) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x_\circ \in A_i\,, \quad \forall\, i \in I \quad y = f(x_\circ) \in f(A_i) \\ &\Leftrightarrow \exists\, x_\circ \in A_i\,, \quad y = f(x_\circ) \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \\ &\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i) \end{aligned}$$

ب $\leftarrow$ الف: فرض کنید $x_۱ \neq x_۲$ دو عضو X باشند. تعریف کنید $A_۱ = \{x_۱\}$ و $A_۲ = \{x_۲\}$

در این صورت $A_۱ \cap A_۲ = \{x_۱\} \cap \{x_۲\} = \emptyset$ بنا بر فرض $f(A_۱ \cap A_۲) = f(A_۱) \cap f(A_۲)$

پس $f(A_۱) \cap f(A_۲) = f(\emptyset) = \emptyset$ اما می‌دانیم

$$f(A_۱) = f(\{x_۱\}) = \{f(x_۱)\} \text{ و } f(A_۲) = f(\{x_۲\}) = \{f(x_۲)\}$$

پس $\{f(x_۱)\} \cap \{f(x_۲)\} = \emptyset$ یعنی $f(x_۱) \neq f(x_۲)$ بنابراین f یک به یک است.

مرحله دوم: الف $\leftarrow$ ج

فرض کنید $f : X \to Y$ یک به یک باشد. در این صورت $f :\to \mathrm{Im}(f)$ دوسویی است پس

$$\forall\, y \in \mathrm{Im}(f) \;\; \exists!\;\, x \in X \quad \text{s.t.} \quad f(x) = y$$

از آنجا که X غیر تهی در نظر گرفته شده است پس حداقل یک $x_\circ \in X$ موجود است.

تابع $g : Y \to X$ با ضابطه‌ی زیر یک معکوس چپ f می‌باشد.

$$g(y) = \begin{cases} x & , \quad f(x) = y \in \mathrm{Im}(f) \\ x_\circ & , \quad y \in Y \setminus \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

زیرا که به ازای هر $x \in X$، $gof(x) = g(f(x)) = x$.

پس f معکوس چپ دارد.

ج ← د: فرض کنید $g : Y \to X$ معکوس چپ f باشد و دو تابع $h, k : Z \to X$ چنان باشند که $f \circ h = f \circ k$ پس اگر g را از طرف چپ ترکیب کنیم، آنگاه $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ بنابه خاصیت شرکت‌پذیری در ترکیب توابع داریم

$$(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$$

ار آنجا که g معکوس چپ f است پس $g \circ f = I_X$ و در نتیجه

$$I_X \circ h = I_X \circ k \Rightarrow h = k$$

د ← الف: فرض کنید به ازای هر دو تابع $h, k : Z \to X$ و تساوی $f \circ h = f \circ k$ تساوی $h = k$ را نتیجه دهد. آنگاه ثابت می‌کنیم که f یک به یک است.

برای یک به یکی f، فرض کنید $f(x_۱) = f(x_۲)$ تعریف کنید $Z = \{z\}$، $h(z) = x_۱$ و $k(z) = x_۲$. و بنابراین $f(x_۱) = f \circ h(z)$ و $f(x_۲) = f \circ k(z)$ پس $f \circ h = f \circ k$ بنابه فرض $h = k$ یعنی $h(z) = k(z)$ در نتیجه $x_۱ = x_۲$. از آنجا که $x_۱$ و $x_۲$ دلخواه انتخاب شده‌اند، پس f یک به یک است. □

حال اگر $f : X \to Y$ یک تابع پوشا باشد آنگاه به ازای هر $y \in Y$ حداقل یک $x \in X$ چنان موجود است که $f(x) = y$ یعنی $x \in f^{-۱}(\{y\})$ پس به ازای هر $y \in Y$، $f^{-۱}(\{y\})$ غیر تهی

است. می‌دانیم که

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(\bigcup_{y\in Y}\{y\}) = \bigcup_{y\in Y} f^{-1}(\{y\})$$

یعنی $\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}$، X را می‌پوشاند.

بدیهی است که اگر $y_1 \neq y_2$ آنگاه $f^{-1}(\{y_1\})\cap f^{-1}(\{y_2\}) = \emptyset$. زیرا:

$f^{-1}(\{y_1\})\cap f^{-1}(\{y_2\}) = f^{-1}(\{y_1\}\cap\{y_2\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

با توجه به توضیحات فوق $\{f^{-1}(\{y\})|y\in Y\}$ یک افراز برای X تشکیل می‌دهد. از آنجا که هر افراز، تشکیل یک هم‌ارزی می‌دهد، پس رابطه‌ی هم‌ارزی زیر به دست می‌آید.

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \exists\, y\in Y \quad x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$$

به عبارتی دیگر از آنجا که $f(x_1) = f(x_2) = y$ پس

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

و $[x] = f^{-1}(\{y\})$ که $f(x) = y$.

می‌دانیم که هر کلاس هم‌ارزی غیر تهی است. پس به ازای هر $y\in Y$ می‌توانیم یک عضو از کلاس هم‌ارزی $[x]$ که $f(x) = y$ انتخاب کنیم. البته لازم به ذکر است که چنین انتخابی منوط به قبولی اصل انتخاب است که در فصل‌های آتی از آن با معادل‌های آن به طور مشروح صحبت خواهیم کرد. حال که به ازای هر $y\in Y$ یک نماینده $x\in X$ از $[x]$ داریم می‌توانیم تابع $g : Y\to X$ را با ضابطه‌ی $g(y) = x$ که $f(x) = y$ تعریف کنیم. که x یک عضو منحصر بفرد از $f^{-1}(\{y\})$ انتخاب شده است.

قضیه ۴.۴.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ داده شده است. در این صورت شرایط زیر با هم معادلند.

الف) f پوشا است.

ب) f معکوس راست دارد.

ج) به ازای هر دو تابع $h, k : Y \to Z$ اگر $h \circ f = k \circ f$، آنگاه $h = k$.

برهان. برای اثبات قضیه ثابت می‌کنیم الف ← ب ← ج ← الف.

الف ← ب: فرض کنید $f : X \to Y$ پوشا باشد. بنابه مطالب فوق $\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$ تشکیل یک افراز برای X می‌دهد. تابع $g : Y \to X$ را به صورت $g(y) = x$ که $(f(x) = y)$ $x \in f^{-1}(\{y\})$ همانند فوق تعریف می‌کنیم.

به ازای هر $y \in Y$, $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ زیرا که $x \in f^{-1}(\{y\})$. پس g معکوس راست f است.

ب ← ج: فرض کنید g معکوس راست f و دو تابع $h, k : Y \to Z$ چنان باشند که $h \circ f = k \circ f$. اگر تابع g را از راست ترکیب کنیم، آنگاه

$$(h \circ f) \circ g = (k \circ f) \circ g$$

بنابه خاصیت شرکت‌پذیری در ترکیب توابع

$$h \circ (f \circ g) = k \circ (f \circ g)$$

از آنجا که g معکوس راست f است پس $f \circ g = I_Y$ و لذا

$$h \circ I_Y = k \circ I_Y \Rightarrow h = k$$

ج ← الف: فرض کنید به ازای هر دو تابع $h, k : Y \to Z$ تساوی $h \circ f = k \circ f$، نتیجه دهد $h = k$. با این فرض، ثابت می‌کنیم f یک تابع پوشا است. از قانون عکس نقیض استفاده می‌کنیم. فرض کنید f پوشا نباشد. در این صورت $\mathrm{Im}(f) \neq Y$ فرض کنید $y_\circ \in Y \setminus Im(f)$. مجموعه‌ی سه عضوی $Z = \{z_\circ, z_۱, z_۲\}$ و دو تابع متفاوت h و k با ضوابط زیر در نظر بگیرید

$$h(y) = \begin{cases} z_\circ & , \quad y \neq y_\circ \\ z_۱ & , \quad y = y_\circ \end{cases} \qquad\qquad k(y) = \begin{cases} z_\circ & , \quad y \neq y_\circ \\ z_۲ & , \quad y = y_\circ \end{cases}$$

از آنجا که $z_۱ \neq z_۲$ پس $h \neq k$. اما

$$h \circ f(x) = h(f(x)) = z_\circ \quad \text{و} \quad k \circ f(x) = k(f(x)) = z_\circ$$

یعنی $h \circ f = k \circ f$ و $h \neq k$. و این متناقض با فرض قضیه است. بنابراین f پوشا است. می‌دانید که اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$. پس نقیض اگر $h \circ f = k \circ f$، آنگاه $h = k$ معادل است با $h \circ f = k \circ f$ و $h \neq k$. □

اگر $f : X \to Y$ دوسویی باشد، آنگاه معکوس چپ و معکوس راست دارد. قبلاً ثابت شد که اگر تابعی معکوس چپ و راست داشته باشد، آنگاه تمام معکوس‌های چپ و راست با هم برابرند و با $f^{-۱}$ نمایش داده می‌شود که معکوس f است. اگر چه قبلاً هم‌ارزی تابع دوسویی و معکوس‌پذیر بودن را ثابت کردیم اما از دو قضیه‌ی فوق نیز می‌توان نتیجه گرفت که:

نتیجه ۱.۴.۴. تابع $f : X \to Y$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر f دوسویی باشد.

برهان. اگر $f : X \to Y$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $f^{-۱}$ معکوس چپ و راست f است پس f یک به یک و پوشاست. □

گزاره ۱.۴.۴. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این صورت یک تابع پوشا مانند $f : A \sqcup B \to A \cup B$ وجود دارد.

برهان. بدیهی است که دو تابع شمول $i_A : A \to A \cup B$ و $i_B : B \to A \cup B$ وجود دارد. بنابه قضیه ۶.۲.۴ پس تابع منحصر به فرد $f : A \sqcup B \to A \cup B$ چنان موجود است که $f \circ i_۱(a) = i_A(a) = a$ و $f \circ i_۲(b) = i_B(b) = b$. از تعریف f پوشایی آن واضح است. □

نتیجه ۲.۴.۴. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت یک تابع یک به یک از $A \cup B$ به $A \sqcup B$ وجود دارد.

برهان. از آنجا $f : A \sqcup B \to A \cup B$ در قضیه‌ی فوق پوشاست پس یک معکوس راست مانند $g : A \cup B \to A \sqcup B$ دارد به طوری که $f \circ g = I_{A \cup B}$. بنابراین f معکوس چپ g است و لذا g یک به یک است. □

نتیجه ۳.۴.۴. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت $A \cup B$ هم‌ارز با یک زیرمجموعه‌ی $A \sqcup B$ است.

برهان. به صورت ساده می‌توان نوشت:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \cong A \sqcup (B \setminus A)$$

و

$$A \sqcup (B \setminus A) = A \times \{۱\} \cup (B \setminus A) \times \{۲\} \subseteq A \times \{۱\} \cup B \times \{۲\} = A \sqcup B.$$

□

۵.۴ (قضیه اساسی توابع)

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع پوشا و $\sim$ رابطه‌ی هم‌ارزی تولید شده به وسیله‌ی افراز $\{f^{-1}(\{y\}) | y \in Y\}$ برای X باشد. در این صورت f یک تابع دوسویی $\overline{f} : X/\sim \to Y$ با ضابطه‌ی $\overline{f}([x]) = f(x)$ القا می‌کند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $\overline{f}$ خوش تعریف است (یعنی $\overline{f}$ یک تابع است). به ازای هر $[x] \in X/\sim$، یک y به صورت $f(x) = y$ وجود دارد. حال اگر $[x_1] = [x_2]$ آنگاه بنابه تعریف رابطه‌ی هم‌ارزی $f(x_1) = f(x_2)$ پس $\overline{f}([x_1]) = \overline{f}([x_2])$ و بنابراین $\overline{f}$ یک تابع است.

حال ثابت می‌کنیم $\overline{f}$ یک به یک است. فرض کنید

$$\overline{f}([x_1]) = \overline{f}([x_2]) \ \Rightarrow \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 \sim x_2$$

بنابه افراز کلاس‌های هم‌ارزی $[x_1] = [x_2]$ پس $\overline{f}$ یک به یک است. بنابه پوشایی تابع f بدیهی است که به ازای هر $y \in Y$ حداقل یک $x \in X$ چنان موجود است که $f(x) = y$ پس $[x] = f^{-1}(\{y\})$ و $\overline{f}(\{x\}) = f(x) = y$ پس $\overline{f}$ پوشا است. بنابراین $\overline{f}$ یک تابع دوسویی و یک تناظر یک به یک بین $X/\sim$ و Y می‌باشد. $\square$

بدیهی است که به ازای هر مجموعه‌ی X، $I_X : X \to X$ یک تناظر یک به یک است. و اگر $f : X \to Y$ دوسویی باشد، آنگاه $f^{-1} : Y \to X$ نیز دوسویی است. اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ دوسویی باشد، نگاه به سادگی می‌توان ثابت کرد که $f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$ معکوس $g \circ f$ است و لذا $g \circ f$ دوسویی است.

از مطالب فوق نتیجه می‌شود که رابطه‌ی تناظر بین مجموعه‌ها، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و می‌توان

کلاس‌های هم‌ارزی آنها را به دست آورد. در مطالب بخش هم‌ارزی و افراز از فصل رابطه و ترتیب، توضیح داده شد که می‌توان اعضای هر کلاس هم‌ارزی را به صورت یکسان در نظر گرفت و همه‌ی آنها را با یک دید نگریست.

به عنوان مثال هر مجموعه ای را که متناظر با $X\times Y$ باشد می‌توان به عنوان حاصلضرب دو مجموعه‌ی X و Y در نظر گرفت. و هر مجموعه‌ای را که متناظر با $X \sqcup Y$ باشد می‌توان به عنوان هم‌ضرب دو مجموعه‌ی X و Y در نظر گرفت.

با توضیحات فوق می‌توانید مجموعه‌های خارج قسمتی را که اعضای آن مجموعه هستند به عنوان مجموعه‌های آشنا مشاهده کنید.

مثال ۱.۵.۴. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ در نظر بگیرید. f یک تابع پوشاست و به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$،

$$f^{-۱}(\{n\})=\{x\in\mathbb{R}|\,[x]=n\}$$

در بحث توابع پوشا دیدیم $x_۱\sim x_۲ \Leftrightarrow [x_۱]=[x_۲]$ اگر کلاس هم‌ارزی x را با $\overline{x}$ نمایش دهیم، تابع $\overline{f}:\mathbb{R}/\sim\to\mathbb{Z}$ با ضابطه‌ی $\overline{f}(\overline{x})=[x]$ یک تابع دوسویی است. پس $\mathbb{R}/\sim$ همان $\mathbb{Z}$ است.

مثال ۲.۵.۴. فرض کنید $S^۱$ دایره‌ی مثلثاتی به مرکز مبدا و شعاع واحد و در جهت مثبت خلاف عقربه‌ی ساعت باشد. تابع $f:\mathbb{R}\to S^۱$ را با ضابطه‌ی $f(t)=(\cos ۲\pi t,\sin ۲\pi t)$ در نظر بگیرید. می‌دانید که

$$\sin(۲k\pi+\theta)=\sin\theta\ \ ,\ \ \cos(۲k\pi+\theta)=\cos\theta$$

تابع f یک تابع پوشاست و رابطه‌ی هم‌ارزی زیر را با استفاده از مفاهیم قبل داریم.

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow f(t_1) = f(t_2)$$

پس

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1) = (\cos 2\pi t_2, \sin 2\pi t_2)$$

یعنی

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow \cos 2\pi t_1 = \cos 2\pi t_2 \ , \quad \sin 2\pi t_1 = \sin 2\pi t_2$$

لذا به ازای $k \in \mathbb{Z}$،

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow 2\pi t_2 = 2k\pi + 2\pi t_1$$

در نتیجه $k \in \mathbb{Z}$،

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow t_2 = k + t_1$$

یعنی

$$t_1 \sim t_2 \quad \Leftrightarrow t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$$

حال اگر $\mathbb{R}/\sim$ را با $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ نمایش دهیم، تابع $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ با ضابطه‌ی $\overline{f}([t]) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ یک تابع دوسویی است. بنابراین $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ همان دایره‌ی مثلثاتی است.

برای مطالعه: اگر هر نقطه $A(x,y)$ از صفحه را به صورت یک عدد مختلط $z = x + iy$ که $i^2 = -1$ بنویسیم و روی آن جمع و ضرب معمولی تعریف کنیم، آنگاه می‌توان هر عدد مختلط

$\cos\theta+i\sin\theta$ را به صورت $e^{i\theta}$ بنویسیم که در آن $1 = e^{\circ} = e^{2k\pi i}$ و هر عدد مختلط $z = x+iy$ را به صورت $z = |z|\cdot e^{i\theta}$ بنویسیم که در آن $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ و θ زاویه‌ی OA با محور مثبت xها است. با این تعاریف تابع f در مثال فوق را می‌توان به صورت $f(t) = e^{2\pi ti}$ نوشت.

۶.۴ تناظر مجموعه‌ها

حال که در مورد هم‌ارزی مجموعه‌ها با رابطه‌ی تناظر صحبت به میان آمد، می‌خواهیم بعضی از تناظرها را بررسی کنیم. اگر رابطه‌ی تناظر را با نماد $\cong$ نمایش دهیم، آنگاه اگر به ازای هر دو مجموعه‌ی A و B تعریف می‌کنیم:

$$A \cong B \Leftrightarrow \exists \quad f : A \xrightarrow[onto]{1-1} B$$

$A \cong B$ هرگاه یک تابع دوسویی بین آنها بتوان تعریف کرد.

قضیه ۱.۶.۴. فرض کنید $A \cong C$ و $B \cong D$. در این صورت

الف) $A \times B \cong C \times D$

ب) $A \sqcup B \cong C \sqcup D$

برهان. الف: فرض کنید $f : A \to C$ و $g : B \to D$ دو تابع دوسویی باشند. قبلاً ثابت شد که تابع $f \times g : A \times B \to C \times D$ با ضابطه‌ی $(f \times g) = (a,b) = (f(a), g(b))$ خوش تعریف است. ثابت می‌کنیم $f \times g$ دوسویی است.

اگر $(f \times g)(a_1, b_1) = (f \times g)(a_2, b_2)$، آنگاه $(f(a_1), g(b_1)) = (f(a_2), g(b_2))$ لذا $f(a_1) = f(a_2)$ و $g(b_1) = g(b_2)$ بنابه یک به یکی f و g، $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ در نتیجه $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ یعنی $f \times g$ یک به یک است. برای پوشایی $f \times g$، عضو دلخواه

$(c,d) \in C \times D$ را در نظر بگیرید. بنابه پوشایی f و g و $a \in A$ و $b \in B$ چنان موجودند که $f(a) = c$ و $g(b) = d$ پس $(f \times g)(a,b) = (f(a), g(b)) = (c,d)$ یعنی $f \times g$ پوشاست.

ب: ابتدا فرض می‌کنیم $A \cap B = \emptyset$ و $C \cap D = \emptyset$ و ثابت می‌کنیم $A \cup B \cong C \cup D$ در این صورت $f \cup g : A \cup B \to C \cup D$ دوسویی است. می‌دانید که

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ g(x) & , \quad x \in B \end{cases}$$

برای یک به یکی $f \cup g$، فرض کنید $(f \cup g)(x_۱) = (f \cup g)(x_۲)$.

ار آنجا که $C \cap D = \emptyset$ پس در هیچ حالت $f(x) = g(x')$ نیست. و این یعنی $x_۱, x_۲ \in A$ یا $x_۱, x_۲ \in B$، اگر $x_۱, x_۲ \in A$، آنگاه $(f \cup g)(x_۱) = f(x_۱)$ و $(f \cup g)(x_۲) = f(x_۲)$ بنابه یک به یکی f، $x_۱ = x_۲$ و اگر $x_۱, x_۲ \in B$، آنگاه $(f \cup g)(x_۱) = g(x_۱)$ و $(f \cup g)(x_۲) = g(x_۲)$ بنابه یک به یکی g، $x_۱ = x_۲$.

به ازای هر $y \in C \cup D$، $y \in C$ یا $y \in D$ اگر $y \in C$ بنابه پوشایی f، $x \in A$ چنان موجود است که $f(x) = y$ لذا $(f \cup g)(x) = y$ و اگر $y \in D$، آنگاه بنابه پوشایی g، $x \in B$ چنان موجود است که $f(x) = y$ و لذا $(f \cup g)(x) = y$ پس $f \cup g$ پوشاست.

بدیهی است که به ازای هر مجموعه‌ی X , $X \cong X \times \{۱\}$ و به ازای هر دو مجموعه‌ی X و Y , $X \times \{۱\} \cap Y \times \{۲\} = \emptyset$. بنابه قسمت الف و مطلب فوق:

$$A \sqcup B = A \times \{۱\} \cup B \times \{۲\} \cong C \times \{۱\} \cup D \times \{۲\} = C \sqcup D$$

دیاگرام‌های جابجایی زیر مفاهیم فوق را نشان می‌دهند.

$$\begin{tikzcd} C & C\times D \arrow[l, "P_1"'] \arrow[r, "P_2"] & D \\ A \arrow[u, "f"', "\cong"] & A\times B \arrow[l, "P_1"] \arrow[r, "P_2"'] \arrow[u, dotted, "f\times g"] & B \arrow[u, "g", "\cong"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"', "\cong"] & A\sqcup B \arrow[d, dotted, "f\sqcup g"] & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "g", "\cong"'] \\ C \arrow[r, "i_1"'] & C\sqcup D & D \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

□

نتیجه ۱.۶.۴. فرض کنید به ازای $i = 1, 2, \cdots, n$، $X_i \cong Y_i$. در این صورت:

الف: $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \cong Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$

ب: $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_n \cong Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$

برهان. با استقراء و با استفاده از قضیه‌ی فوق، نتیجه به سادگی به دست می‌آید. □

نتیجه ۲.۶.۴. اگر $X \cong Y$، آنگاه:

الف: $X^n \cong Y^n$ ب: $\bigsqcup_{i=1}^{n} X \cong \bigsqcup_{i=1}^{n} Y$.

اگر $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های غیر تهی باشد، می‌دانید که هر عضو $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ به صورت دنباله‌ی $(x_1, x_2, \cdots)$ است که به ازای هر n، $x_n \in X_n$ و هر عضو $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ به صورت زوج (x_n, n) است که $x_n \in X_n$ زیرا که $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times \{n\}$.

قضیه ۲.۶.۴. فرض کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $X_n \cong Y_n$. در این صورت:

الف: $\prod_{n=1}^{\infty} X_n \cong \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ ب: $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n$.

برهان. الف: فرض کنید به ازای هر n، تابع دوسویی $f_n : X_n \to Y_n$ موجود است. تابع $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ را به صورت

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots)$$

تعریف می‌کنیم. خوش تعریفی f به سادگی به دست می‌آید.

حال فرض می‌کنیم

$$f(a_1, a_2, \cdots) = f(b_1, b_2 \cdots)$$

پس دنباله‌ی

$$(f_1(a_1), f_2(a_2), \cdots) = (f_1(b_1), f_2(b_2), \cdots)$$

با هم مساوی هستند. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n(a_n) = f_n(b_n)$ بنابه یک به یکی f_n، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$. لذا

$$(a_1, a_2, \cdots) = (b_1, b_2, \cdots)$$

یعنی f یک به یک است. برای پوشایی f، فرض کنید $(y_1, y_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$. یعنی به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in Y_n$. بنابه پوشایی f_n، به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \in X_n$ چنان موجود است که $f_n(x_n) = y_n$ لذا $(f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$ و $f(x_1, x_2, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$. بنابراین $(x_1, x_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ موجود است که $f(x_1, x_2, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots)$ پس f پوشاست.

ب: بدیهی است که به ازای هر n، $X_n \times \{n\} \cong Y_n \times \{n\}$ و به ازای هر $m \neq n$، $X_n \times \{n\} \cap X_m \times \{m\} = \emptyset$ بنابراین

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times \{n\} \cong \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \times \{n\} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

کافی است تابع $f : \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n \to \bigsqcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ را با ضابطه‌ی $f(x_n, n) = f_n(x_n)$ تعریف کنید و ثابت کنید f دوسویی است. $\square$

اگر $\{X_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای اندیس‌دار از مجموعه‌های غیر تهی باشد، آنگاه می‌دانید که هر عضو $\prod_{i\in I} X_i$ به صورت تابعی مانند $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ است که به ازای هر $i \in I$، $f(i) \in X_i$. در بسیاری مواقع $f \in \prod_{i\in I} X_i$ را به صورت (x_i) نمایش می‌دهیم که $f(i) = x_i$. و هر عضو $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ به صورت زوج (x_i, i) است که $x_i \in X_i$.

قضیه ۳.۶.۴. فرض کنید $\{X_i\}_{i\in I}$ و $\{Y_i\}_{i\in I}$ دو خانواده‌ی اندیس‌دار از مجموعه‌های غیر تهی باشند به طوری که به ازای هر $i \in I$، $X_i \cong Y_i$. در این صورت:

الف: $\prod_{i\in I} X_i \cong \prod_{i\in I} Y_i$ ب: $\bigsqcup_{i\in I} X_i \cong \bigsqcup_{i\in I} Y_i$

برهان. الف: فرض کنید به ازای هر $i \in I$، تابع دوسویی $f_i : X_i \to Y_i$ موجود باشد. تابع $f : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ را با ضابطه‌ی $f(x_i) = (f_i(x_i))$ تعریف می‌کنیم. به عبارتی دیگر به ازای هر $g : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ که $g(i) \in X_i$، تابع یکتای $h : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ با ضابطه‌ی $h(i) = f_i(g(i))$ می‌توان به دست آورد. تعریف کنید $f(g) = h$. همانند قضایای قبل می‌توان ثابت کرد که f دوسویی است.

ب: روال اثبات همانند قضایای قبل است. □

نتیجه ۳.۶.۴. اگر $X \cong Y$، آنگاه به ازای هر مجموعه‌ی I:

الف: $X^I \cong Y^I$ پ: $\bigsqcup_I X \cong \bigsqcup_I Y$

ب: $I^X \cong I^Y$

برهان. الف: می‌دانید که هر عضو X^I به صورت تابعی مانند $g : I \to X$ است.

فرض کنید $f : X \to Y$ دوسویی باشد. تابع $h : X^I \to Y^I$ با ضابطه‌ی $h(g) = f \circ g$ به ازای

هر X $g : I \to X$ یک تابع دوسویی است.

ب: تابع $h : I^Y \to I^X$ با ضابطه‌ی $h(k) = k \circ f$ به ازای هر $k : Y \to I$ دوسویی است.

پ: می‌دانید که $\bigsqcup_I X = X \times I$ پس بدیهی است که $X \times I \cong Y \times I$. □

قضیه ۴.۶.۴. فرض کنید $X \cong Y$ و $I \cong J$. در این صورت:

الف: $X^I \cong Y^J$. ب: $\bigsqcup_I X \cong \bigsqcup_J Y$.

برهان. الف: فرض کنید $f : X \to Y$ و $g : I \to J$ دوسویی باشند. به ازای هر تابع $h : I \to X$ می‌توان تابع $J \xrightarrow{g^{-1}} I \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$ را به دست آورد. حال تابع $\varphi : X^I \to Y^J$ را با ضابطه‌ی $\varphi(h) = f \circ h \circ g^{-1}$ تعریف کنید. به ازای هر دو تابع $h_1, h_2 : I \to X$ از آنجا که f و g دوسویی هستند می‌توان آنها را ترکیب یا حذف کرد.

$$h_1 = h_2 \Leftrightarrow f \circ h_1 \circ g^{-1} = f \circ h_2 \circ g^{-1} \Leftrightarrow \varphi(h_1) = \varphi(h_2)$$

بدین صورت که

$$\varphi(h_1) = \varphi(h_2) \Rightarrow f \circ h_1 \circ g^{-1} = f \circ h_2 \circ g^{-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ (f \circ h_1 \circ g^{-1}) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ h_2 \circ g^{-1}) \circ g$$

بنابه شرکت‌پذیری ترکیب توابع

$$(f^{-1} \circ f) \circ h_1 \circ (g^{-1} \circ g) = (f^{-1} \circ f) \circ h_2 \circ (g^{-1} \circ g)$$

$$\Rightarrow I_X \circ h_1 \circ I_I = I_X \circ h_2 \circ I_I \Rightarrow h_1 = h_2$$

پس φ یک تابع یک به یک است. به ازای هر $k : I \to Y$

$$\varphi(f^{-1} \circ k \circ g) = f \circ (f^{-1} \circ k \circ g) \circ g^{-1} = (f \circ f^{-1}) \circ k \circ (g \circ g^{-1})$$

$$= I_Y \circ k \circ I_I = k$$

پس φ پوشاست. φ یک به یک و پوشاست. در نتیجه φ دوسویی است. $\square$

تذکر ۱.۶.۴. در بسیاری از کتابهای نظریه مجموعه‌ها Y^X را به صورت $hom(X,Y)$ نیز نمایش می‌دهند.

$$Y^X = hom(X,Y) = \{f : X \to Y | \text{یک تابع است. f}\}$$

به یاد دارید که $X^2 = \{(x,y) | x,y \in X\}$ و هر زوج مرتب (x,y) را به عنوان تابعی مانند $f : \{1,2\} \to X$ تعریف کردیم که $f(1) = x$ و $f(2) = y$. با این تعریف و توان دو مجموعه $X^2 = X^{\{1,2\}}$. از همین نماد ایده می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $2^X = Y^X$ که Y یک مجموعه‌ی دو عضویی است به عبارت ساده $2^X = \{0,1\}^X$.

دوباره یادآوری می‌کنیم که هر عضو 2^X، یک تابع مشخصه به صورت $\chi_A : X \to \{0,1\}$ است که

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

قضیه ۵.۶.۴. فرض کنید X یک مجموعه باشد. در این صورت $P(X) \cong 2^X$.

برهان. تابع $\varphi : P(X) \to 2^X$ را با ضابطه‌ی $\varphi(A) = \chi_A$ تعریف می‌کنیم.

به سادگی ثابت می‌شود که φ یک تابع یک به یک است. برای هر دو مجموعه A_1 و A_2

$$A_1 = A_2 \Leftrightarrow \ \forall x \in X \ \ \chi_{A_1}(x) = \chi_{A_2}(x) \Leftrightarrow \chi_{A_1} = \chi_{A_2} \Leftrightarrow \varphi(A_1) = \varphi(A_2)$$

حال اگر $f \in 2^X$، پس $f : X \to \{0, 1\}$ یک تابع است. حال اگر تعریف کنیم $A = f^{-1}(\{1\})$ پس $A = X \setminus A$ $f^{-1}(\{0\})$ بنابراین $f = \chi_A$ به ازای یک $A \in P(\chi)$ و $f = \chi_A$ یعنی $\varphi(A) = f$. پس φ پوشاست. φ یک به یک و پوشاست پس یک تناظر یک به یک است. $\square$

می‌دانید که اگر X یک مجموعه‌ی n عضویی باشد، $P(X)$ یک مجموعه‌ی 2^n عضویی است حال این سوال پیش می‌آید که اگر X یک مجموعه‌ی نامتناهی باشد، $P(X)$ را با چه مجموعه‌ی آشنایی می‌توان متناظر کرد. به عنوان مثال $P(\mathbb{N})$ با کدام مجموعه معادل است. نکته‌ی دیگر آنکه می‌دانیم که اگر X متناهی باشد، آنگاه $P(X)$ هیچ وقت با X متناظر نیست. آیا این موضوع برای مجموعه‌های نامتناهی نیز برقرار است؟ جواب این سوالات را در قضایای مهمی از جمله قضیه‌ی کانتور و قضیه‌ی شرودر_ برنشتاین می‌بینم و از آن به پارادوکس کانتور می‌رسیم.

به ازای هر مجموعه‌ی X، یک تابع یک به یک غیر پوشا مانند $f : X \to P(X)$ با ضابطه‌ی $f(x) = \{x\}$ وجود دارد. و می‌دانید که اگر $g : X \to Y$ یک تابع یک به یک باشد، آنگاه $X \cong \mathrm{Im}(g)$ و $\mathrm{Im}(g) \subseteq Y$ یعنی X با یک زیر مجموعه‌ی Y متناظر است. حال سوال این است که آیا می‌توان یک تابع دوسویی بین X و $P(X)$ تعریف کرد. کانتور ثابت کرد که چنین تابعی وجود ندارد.

قضیه ۶.۶.۴. (کانتور) به ازای هر مجموعه‌ی X، $X \ncong P(X)$.

برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم تابع $f : X \to P(X)$ دوسویی باشد. مجموعه‌ی $A = \{x \in X | x \notin f(x)\}$ عضویی از $P(X)$ است. بنابه فرض خلف، از آنجا که f پوشاست پس $a \in X$ چنان موجود است که $f(a) = A$. حال

اگر $a \in A$ آنگاه a عنصری از X است که $a \notin A$. و

اگر $a \notin A$ آنگاه a عنصری از X است که در A است پس $a \in A$.

و در هر صورت به تناقض می‌رسیم.

بنابراین هیچ تابع دوسویی بین X و $P(X)$ وجود ندارد. $\square$

بعضی مواقع تعریف تابع دوسویی بین دو مجموعه‌ی متناظر خیلی سخت و یا غیر ممکن است. ولی می‌توان همانند فوق یک تابع یک به یک از یک به دیگری تعریف کرد.

سوال این است که آیا راهی برای تناظر دو مجموعه می‌توان یافت؟

کانتور این موضوع را به این شیوه مطرح نمود که اگر از A به B و از B به A بتوان توابعی یک به یک تعریف کرد، آنگاه آن دو با هم متناظر هستند. بعدها شرودر و برنشتاین این قضیه را ثابت کردند.

قضیه ۷.۶.۴. (شرودر ـ برنشتاین) فرض کنید دو مجموعه‌ی A و B چنان باشند که A با یک زیرمجموعه‌ی B و B با یک زیرمجموعه‌ی A هم‌ارز باشند. در این صورت A و B با هم معادلند.

برهان. ابتد قضیه را برای دو مجموعه‌ی A و B که B یک زیرمجموعه‌ی A است ثابت می‌کنیم. بدیهی است که تابع شمول $i : B \hookrightarrow A$ یک به یک است. اگر $A = B$ تابع همانی جواب مسئله است. فرض می‌کنیم که B زیرمجموعه‌ی سره‌ای از A و $f : A \to B$ یک تابع یک به یک باشد. ثابت می‌کنیم $B \cong A$. از آنجا که $B \subset A$ و $f(A) \subseteq B$ پس به ازای هر $x \in A$ می‌توان

$f^2(x)=f(f(x))$، $f^3(x)=f(f^2(x))$ و به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ و به ازای هر $X\subseteq A$، $f^n(X)=f(f^{n-1}(X))$ تعریف کرد.

فرض کنید که $C=\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A\setminus B)$ که $f^0(A\setminus B)=A\setminus B$ در نظر گرفته شده است. اگر $m\neq n$، آنگاه $f^n(A\setminus B)\cap f^m(A\setminus B)=\emptyset$ زیرا که اگر $y\in f^n(A\setminus B)\cap f^m(A\setminus B)$ آنگاه $x_1,x_2\in A\setminus B$ چنان موجودند که $y=f^n(x_1)=f^m(x_2)$ بنابه یک به یکی تابع f، با فرض $m>n$، $f^{m-n}(x_2)=x_1$ پس $x_1\in \mathrm{Im}(f)\subseteq B$ در حالیکه $x_1\in A\setminus B$ و این یک تناقض است. از آنجا که $A\setminus B\subseteq C$ پس $A\setminus C\subseteq B$ حال تابع h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad x\in C \\ x & , \quad x\in A\setminus C\end{cases}$$

بنابه یک به یکی تابع f و تابع همانی h یک به یک است.

واضح است که $f(C)=f(\bigcup_{n=0}^{\infty} f(A\setminus B))=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A\setminus B)$ و $f(C)\subseteq C$. بنابه تعریف تابع h، $\mathrm{Im}(h)=f(C)\cup(A\setminus C)$ لذا

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(h)&=(A\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A\setminus B))\cup f(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A\setminus B))\\ &=(A\setminus\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(A\setminus B))\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(A\setminus B))\\ &=(A\setminus f^0((A\setminus B)=A\setminus(A\setminus B)=B\end{aligned}$$

بنابراین $h:A\to B$ یک تابع دوسویی است. پس $A\cong B$.

حال اگر A_0 و B_0 به ترتیب دو زیرمجموعه‌ی A و B باشد به طوری که $A_0\cong B$ و $B_0\cong A$،

و فرض کنیم $f : A \to B_\circ$ و $g : B \to A_\circ$ دوسویی باشد، از آنجاکه ترکیب توابع یک‌به‌یک، یک‌به‌یک است، پس $A \xrightarrow{f} B_\circ \xrightarrow{i} B \xrightarrow{g} A_\circ$ از A به $A_\circ$ یک‌به‌یک است. $A_\circ \subseteq A$ بنابه قسمت اول اثبات $A \cong A_\circ$. طبق فرض $A_\circ \cong B$ لذا بنابه خاصیت تعدی هم‌ارزی $A \cong B$. $\square$

مثال ۱.۶.۴. تابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با ضابطه‌ی $f(n) = (۱, n)$ و تابع $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ با ضابطه‌ی $g(m, n) = ۲^n \times ۳^n$ دو تابع یک به یک هستند پس $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

با استقراء می‌توان ثابت کرد که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$.

تذکر ۲.۶.۴. اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و B یک زیرمجموعه‌ی A چنان باشد که بتوان از A به B یک تابع یک به یک تعریف کرد، آنگاه $A = B$.

پس بدانید که قضیه‌ی شرودر_ برنشتاین برای مجموعه‌های نامتناهی قابل استفاده است.

مثال ۲.۶.۴. تابع $h : \mathbb{Q}^{>\circ} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ با ضابطه‌ی $f(\frac{m}{n}) = (m, n)$ که m و n نسبت به هم اولند، یک تابع یک به یک است. پس ترکیب h با g در مثال قبل یک تابع یک به یک است $g \circ h : \mathbb{Q}^{>\circ} \to \mathbb{N}$. بدیهی است که تابع شمول $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{>\circ}$ یک به یک است. پس $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}^{>\circ}$.

به همن صورت $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}^{<\circ}$.

مثال ۳.۶.۴. فرض کنید E و O به ترتیب مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و فرد باشند. در این صورت $E \cong \mathbb{N} \cong O$، دو تابع $f : \mathbb{N} \to E$ و $g : \mathbb{N} \to O$ با ضابطه‌های $f(n) = ۲n$ و $g(n) = ۲n - ۱$ دوسویی هستند. لذا $E \cong \mathbb{Q}^{<\circ}$ و $O \cong \mathbb{Q}^{>\circ}$.

مثال ۴.۶.۴. بدیهی است که $\mathbb{N} \cong \mathbb{N} \cup \{0\}$ پس

$$\mathbb{N} \cong O \cup E \cup \{0\} \cong \mathbb{Q}^{>0} \cup \mathbb{Q}^{<0} \cup \{0\} = \mathbb{Q}$$

مثال ۵.۶.۴. بدیهی است که $\mathbb{Z}^{>0} \cong \mathbb{N} \cong \mathbb{Z}^{<0}$ لذا

$$\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{>0} \cup \mathbb{Z}^{<0} \cup \{0\} \cong O \cup E \cup \{0\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cong \mathbb{N}$$

پس $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$.

قضیه ۸.۶.۴. اگر $X \cong Y$، آنگاه $P(X) \cong P(Y)$.

برهان. می‌دانیم که $P(X) \cong 2^X$ و اگر $X \cong Y$، آنگاه طبق قضیه $2^X \cong 2^Y$ پس $P(X) \cong P(Y)$. $\square$

مثال ۶.۶.۴. $\mathbb{N} \cong \mathbb{Q}$ پس $P(\mathbb{N}) \cong P(\mathbb{Q})$ و $2^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{Q}}$.

قضیه ۹.۶.۴. $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$.

برهان. تابع $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(h) = 0 \cdot h(1)h(2)h(3)\cdots$ یک تابع یک به یک است. زیرا که نمایش هر عدد در مبنای ۲، یکتاست.

حال تابع $g : \mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$ را با ضابطه‌ی

$$g(a) = \{x \in \mathbb{Q} | x < a\}$$

تعریف می‌کنیم به ازای هر دو عدد حقیقی $a < b$ حداقل یک عدد گویا $a < r < b$ وجود دارد لذا $g(a) \neq g(b)$ زیرا که $r \in g(b)$ ولی $r \notin g(a)$. بنابراین g یک به یک است. از آنجا که

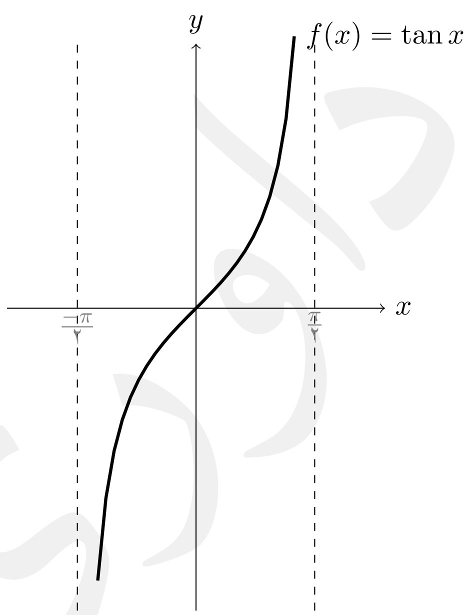
$P(\mathbb{Q}) \cong P(\mathbb{N})$ ، پس یک تابع یک به یک از $\mathbb{R}$ به $P(\mathbb{N})$ وجود دارد. بنابه قضیه‌ی شرودر‌ـ برنشتاین $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$. □

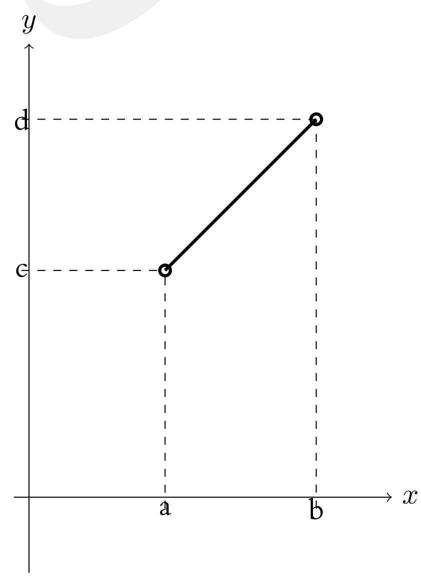
نتیجه ۴.۶.۴.

$$P(\mathbb{N}) \cong P(\mathbb{Z}) \cong P(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{R}$$

از آنجا که هیچ مجموعه‌ای با مجموعه‌ی توانی خود، هم‌ارز نیست لذا مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ با مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ هم‌ارز نیستند.

مثال ۷.۶.۴. تابع $f : (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \tan x$ دوسویی است.





مثال ۸.۶.۴. هر دو بازه‌ی باز (a, b) و (c, d) به وسیله‌ی پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی (a, c) و (b, d) تناظر یک به یک دارند. برای اثبات تابع خطی بین آن‌ها را به دست آورید.

مثال ۹.۶.۴. هر بازه‌ی (a,b) با $\mathbb{R}$ هم‌ارز است.

مثال ۱۰.۶.۴. هیچ بازه‌ای با $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ هم‌ارز نیست.

تمرین

۱. فرض کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. تعداد توابعی که در مجموعه‌های زیر وجود دارند را بیابید.

الف: $A \times \{۱\}$ ب: $\{۱\} \times A$ ج: $A \times \emptyset$

د: $\emptyset \times A$ ه: $\emptyset \times \emptyset$

۲. قسمت الف قضیه ۳.۳.۴ را ثابت کنید.

۳. ثابت کنید $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. مثالهایی بیاورید که تساوی برقرار نباشد.

۴. نتیجه ۱.۳.۴ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید $f : X \longrightarrow X$ یک تابع باشد. در این صورت:

الف: f دارای خاصیت انعکاسی است اگر و تنها اگر $f = I_X$.

ب: f دارای خاصیت تقارنی است اگر و تنها اگر $f = f^{-۱}$ اگر وتنها اگر $f \circ f = I_X$.

ج: f در هر صورت دارای خاصیت تعدی است.

۶. توابعی مانند $f : X \longrightarrow Y$ و مجموعه‌های $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$ مثال بزنید که:

الف: $f(f^{-۱}(B)) \subsetneqq B$. ب: $A \subsetneqq f^{-۱}(f(A))$.

۷.فرض کنید $\chi_A : X \longrightarrow \{۰, ۱\}$ یک تابع مشخصه باشد. شرط لازم و کافی برای X و $A \subseteq X$ بیابید که χ_A :

الف: پوشا باشد. ب: یک به یک باشد. ج: دوسویی باشد.

۸. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع ثابت باشد. شرط لازم و کافی برای X و Y بیابید که تابع f:

الف: پوشا باشد. ب: یک به یک باشد. ج: دوسویی باشد.

۹. فرض کنید مجموعه‌های X، m عضو و Y، n عضو دارد و $m \leq n$.

الف: چند تابع یک به یک از X به Y می‌توان تعریف کرد.

ب: اگر $m = n$، آنگاه چند تابع دوسویی می توان تعریف کرد.

۱۰. یک تابع یک به یک غیرپوشا از اعداد گویای مثبت به اعداد طبیعی مثال بزنید.

۱۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید:

الف: f یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A \subseteq X, \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

ب: f پوشاست اگر وتنها اگر

$$\forall B \subseteq Y, \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

۱۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع باشد. ثابت کنید:

الف: f یک به یک است اگر و تنها اگر

$$\forall A \subseteq X, \quad f(A^c) \subseteq (f(A))^c$$

ب: f پوشاست اگر وتنها اگر

$$\forall A \subseteq X, \quad (f(A))^c \subseteq f(A)^c$$

۱۳. توابعی مثال بزنید که بینهایت معکوس چپ داشته باشند.

۱۴. توابعی مثال بزنید که بینهایت معکوس راست داشته باشند.

۱۵. فرض کنید X مجموعه‌ی تمام دایره‌های به مرکز مبدا مختصات و $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ تابع مساحت باشد. وضعیت یک به یکی و پوشایی تابع f را بررسی کنید.

۱۶. فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ دو تابع باشند. ثابت کنید:

الف: اگر f و g یک به یک باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز یک به یک است.

ب.اگر f و g پوشا باشند، آنگاه $g \circ f$ نیز پوشا است.

ج: اگر $g \circ f$ یک به یک باشد، آنگاه f نیز یک به یک است.

د: اگر $g \circ f$ پوشا باشد، آنگاه g نیز پوشا است.

۱۷. دو تابع $f : X \longrightarrow Y$ و $g : Y \longrightarrow Z$ مثال بزنید که ترکیب آنها دوسویی باشد اما هیچکدام دوسویی نباشند.

۱۸. توابعی یک به یک غیرپوشا از X به Y مثال بزنید که:

الف: $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ب: $Y = \mathbb{R}, X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

۱۹. ثابت کنید هر تابع گویا با ضابطه‌ی $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ معکوس‌پذیر است. دامنه و برد تابع را بیابید.

۲۰. دامنه و برد تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = sin(x)$ را طوری تعیین کنید که تابعی دوسویی گردد.

۲۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه باشند. ثابت کنید اگر $P(X) \cong P(Y)$، آنگاه $X \cong Y$.

۲۲. فرض کنید X، Y و I سه مجموعه‌ی غیر تهی باشند. ثابت کنید اگر $X^I \cong Y^I$، آنگاه $X \cong Y$.

۲۳. فرض کنید X، Y و Z سه مجموعه‌ی غیر تهی و $Y \cap Z = \emptyset$ باشد. ثابت کنید:

$$X^Y \times X^Z \cong X^{Y \cup Z}.$$

۲۴. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیرتهی باشد. ثابت کنید: $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}} \cong X^{\mathbb{N}}$.

۲۵. ثابت کنید به ازای هر n مجموعه‌ی $X_۱, X_۲, ..., X_n$

$$X_۱ \times X_۲ \times ... \times X_n \cong X_{m_۱} \times X_{m_۲} \times ... \times X_{m_n}.$$

که در آن $\{m_۱, m_۲, ..., m_n\} = \mathbb{N}_n$ بدین معنی که اگر حاصلضرب را با هر آرایش دیگری از اندیس‌ها بنویسیم، هم‌ارز هستند.

۲۶. رابطه‌ی هم‌ارزی

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$$

و تابع تفاضل $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ را با ضابطه‌ی $f(a, b) = a - b$ درنظر بگیرید. ثابت کنید رابطه‌ی هم‌ارزی فوق همان رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف شده در قضیه‌ی اساسی تابع است و از آن نتیجه بگیرید: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim \cong \mathbb{Z}$.

۲۷. رابطه‌ی هم‌ارزی

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$$

و تابع کسری $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{۰\} \longrightarrow \mathbb{Q}$ را با ضابطه‌ی $f(a, b) = a/b$ درنظر بگیرید. ثابت کنید رابطه‌ی هم‌ارزی فوق همان رابطه‌ی هم‌ارزی تعریف شده در قضیه‌ی اساسی تابع است و از آن نتیجه یگیرید: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{۰\} / \sim \cong \mathbb{Q}$.

۲۸. تابع $f : X \to Y$ مفروض است. ثابت کنید، رابطه‌ی زیر یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. کلاس‌های هم‌ارزی و مجموعه‌ی خارج‌قسمتی آن را بیابید.

$$R(f) = \{(a, b) \in X \times Y | f(a) = f(b)\}$$